6 класс

Задача 1. «А это вам видеть пока рано»,— сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано? **[*3 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 22 ученика.

Решение. То, что видеть пока рано, две трети девочек увидели правым глазом, а две трети мальчиков — левым. Всего, стало быть, один глаз не закрыли две трети всех учеников — 22 человека.

Задача 2. Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки (рис. 1) так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3 клеточки. **[*3 балла*]** (*В. А. Клепцын*)

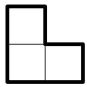

Рис. 1

Решение. См. рис. 2. Решение единственно с точностью до симметрии.

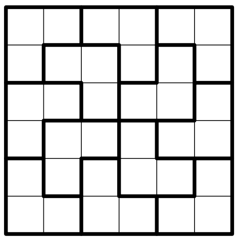

Рис. 2

Задача 3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч? **[*5 баллов*]** (*Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина*)

Ответ. 1:2.

Решение. Поскольку ровно 3 прогноза верны, ровно 2 прогноза неверны.

Разберёмся сначала, какая из команд выиграла. Предположим, что «Север» выиграл. Тогда 4 прогноза («а», «б», «в» и «г») оказались верными, что противоречит условию.

Предположим, что матч закончился ничьей; тогда заведомо неверны прогнозы «а», «в» и «д» (так как при ничьей количество забитых голов чётно). Таким образом верными оказались не более двух прогнозов, что также противоречит условию.

Итак, этот матч «Север» проиграл. Тогда прогнозы «в» и «г» неверны. Значит, все оставшиеся 3 прогноза верны. А именно: ничьей не было, в ворота «Юга» забили, и в матче было забито ровно 3 гола. Но тогда «Юг» забил 2 гола. То есть матч закончился со счётом 1:2.

Задача 4. Найдите все решения ребуса

$$Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ.$$

(Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные.) **[*5 баллов*]** (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. $0 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 96$.

Решение. Так как $8 \cdot ОН < 100$, то $ОН \leqslant 12$, то есть $О = 1$, а Н равно 0 или 2. Но Н не может быть равно 0, так как тогда Я и Ы означали бы одну и ту же цифру. Значит, $Н = 2$. Таким образом, $8 \cdot ОН = 8 \cdot 12 = 96$, значит, МЫ может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как для них Я должно быть равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Значит, $МЫ = 96$, а $Я = 0$.

Задача 5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Решение. Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов назвать. Это можно сделать, например, так.

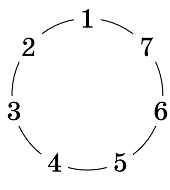

Рис. 3

Пронумеруем цвета числами от 1 до 7 (например, в том же порядке, как и цвета радуги) и заранее расположим их по кругу (рис. 3). Каждый гном должен назвать тот из двух цветов, от которого до другого цвета ближе добраться по часовой стрелке. Тогда три гнома угадают, а три других ошибутся. Например, если спрятан колпак цвета 1, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 2, 3 и 4.

Можно действовать и по-другому. Если гном не видит два цвета одной чётности, то он называет цвет с бóльшим номером, а если цветá, которые он не видит, имеют разную чётность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6. Остальные случаи можно разобрать аналогично.

Комментарии. 1. Принцип действия гномов, изложенный во втором решении, применяется в однокруговых шахматных турнирах с нечётным количеством участников для того, чтобы каждый шахматист сыграл белым и чёрным цветом одинаковое количество партий. А именно, каждый участник турнира получает свой номер, и если встречаются шахматисты с номерами одной чётности, то белыми играет тот, у кого больше номер, а если номера участников имеют разную чётность,— белыми играет тот, у кого номер меньше. Можно убедиться, что в этом случае каждый шахматист проведёт белыми и чёрными одинаковое количество партий.

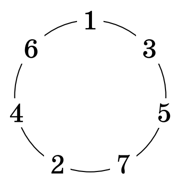

Рис. 4

2. Строго говоря, второе решение отличается от первого только нумерацией цветов. Если расположить цвета по кругу, как на рис. 4, то принцип действия гномов из первого решения в точности описывает второе.

3. Можно доказать, что никакая договорённость не позволит наверняка угадать цвет спрятанного колпака более чем половине гномов.

Задача 6. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рис. 5 у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска? **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 22.

Решение. У каждого малого бруска поверхность распилов составляет половину всей его поверхности. Будем считать только её. Раскрасим малые бруски в чёрный и белый цвета как на рис. 6 (невидимый брусок — чёрный). Тогда каждые два одинаковых соприкасающихся на распиле прямоугольника — разного цвета. Поэтому сумма площадей чёрных распилов равна сумме

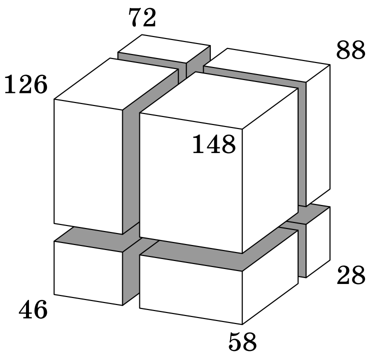

Рис. 5

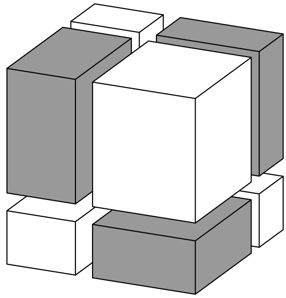

Рис. 6

площадей белых. А тогда и сумма площадей поверхностей белых брусков равна сумме площадей поверхностей чёрных. Отсюда площадь поверхности невидимого чёрного бруска равна

$$(148 + 46 + 72 + 28) - (88 + 126 + 58) = 22.$$