

7 класс

Задача 1. Ниже (рис. 8) приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» (рис. 7, а) и «узких» (рис. 7, б). Нарисуйте, как по линиям мозаики вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.) **[3 балла]** (М. А. Раскин)

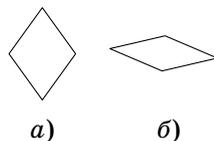


Рис. 7

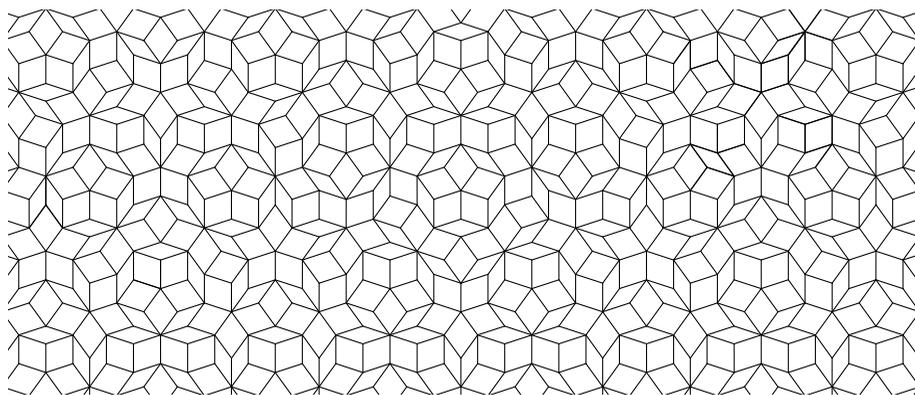


Рис. 8

Решение. Некоторые решения приведены на рис. 9.

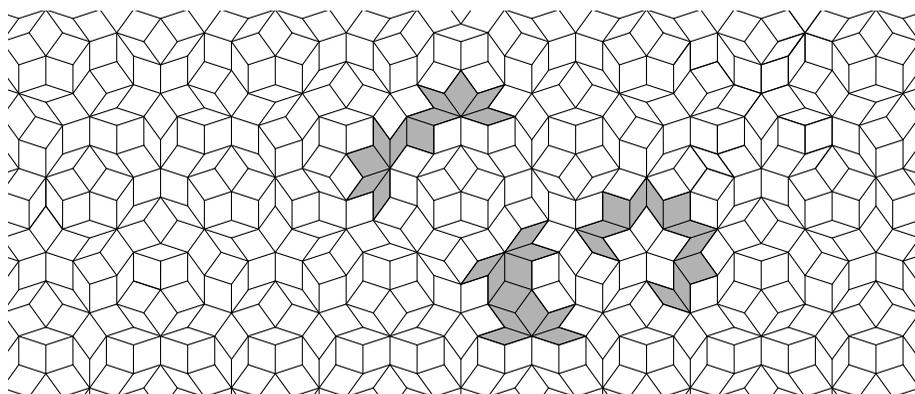


Рис. 9

Комментарии. 1. Объясним, как можно было найти эти решения. Нам надо включить в нашу фигуру намного больше узких ромбов, чем широких, а широких ромбиков на картинке явно больше (см. также комментарий 3).

Нетрудно убедиться, что каждый узкий ромб граничит не более чем с одним другим узким ромбом, а каждый широкий ромб — не более чем с двумя узкими. Для того чтобы соединить восемь узких ромбов (четыре пары) в один многоугольник, нам как раз придётся включить не меньше трёх широких.

Теперь мы можем заштриховать в некоторой области мозаики все пары граничащих узких ромбов, начать с какой-нибудь пары и попытаться три раза добавить какой-нибудь широкий ромб, соединяющий выбранный кусок с ещё одной парой узких ромбов.

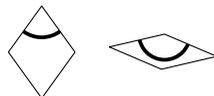


Рис. 10

2. Нарисуем на ромбах дуги, как на рис. 10. *Мозаикой Пенроуза* называется замощение плоскости такими ромбами, при котором каждая дуга, приходящая на границу ромба, продолжается на соседнем ромбе (рис. 11). О фрагменте такой мозаики и идёт речь в задаче.

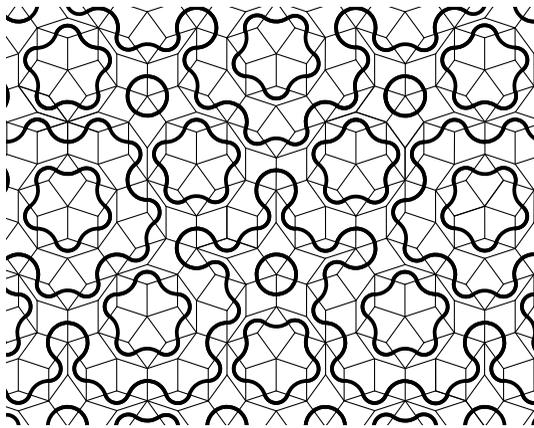


Рис. 11

3. Если взять большой лист бумаги, нарисовать на нём фрагмент мозаики Пенроуза и посчитать все нарисованные ромбы, то широких ромбов будет примерно в 1,6 раз больше. (На самом деле это отношение будет примерно равняться *золотому сечению* — тем ближе к нему, чем больше лист бумаги.)

Задача 2. Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку.

Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались неполитыми.

Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки? [4 балла] (А. В. Шаповалов)

Ответ. 19 цветов.

Решение. Неполитыми осталось 10 цветов, значит, полито было $30 - 10 = 20$ цветов. Рассмотрим последний политый Синеглазкой тюльпан. Так как всего тюльпанов 15, за этим тюльпаном идёт ещё $15 - 10 = 5$ тюльпанов.

Поэтому Незнайка сорвёт эти 5 тюльпанов и закончит рвать цветы как раз на последнем политом Синеглазкой тюльпане. Но это значит, что все остальные политые цветы уцелели. То есть уцелело $20 - 1 = 19$ цветов.

Задача 3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

- а) ничьей не будет;
- б) в ворота «Юга» забьют;
- в) «Север» выиграет;
- г) «Север» не проиграет;
- д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч? [4 балла]

(Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина)

Решение. См. решение задачи 3 из варианта 6 класса.

Задача 4. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рис. 12). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. [6 баллов]

(А. В. Хачатурян)

Ответ. 12.

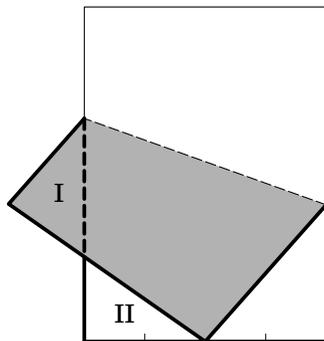


Рис. 12

Решение. Отметим равные отрезки (рис. 13 — здесь мы пользовались тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a + b + 4$, а длина меньшей стороны равна $a + b$. Значит, $a + b = 8$ и большая сторона имеет длину $a + b + 4 = 8 + 4 = 12$.

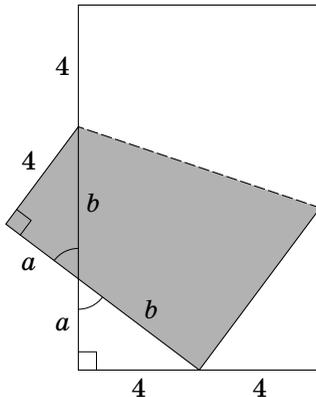


Рис. 13

Комментарий. Применяв теорему Пифагора, можно найти длины сторон треугольников I и II. Оказывается, это *египетские* треугольники — треугольники со сторонами 3, 4 и 5.

Задача 5. В справочнике «Магия для чайников» написано:

Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные.

Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.) **[6 баллов]**

(А. И. Сгибнев, Е. Б. Гладкова)

Ответ. Нет.

Решение. Подсчитаем буквы в слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ». Буква Е встречается 4 раза, а остальные 9 букв встречаются по одному разу. Это значит, что в числе все 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая-то одна цифра (соответствующая букве Е) — ещё 3 раза сверх того.