LXXII Московская математическая олимпиада

10 класс 15.03.2009

Задача № 1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на $\mathbf{847}$ рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее $\mathbf{30\%}$?

Задача № 2. Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

Задача № 3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

Задача № 4. На кольцо свободно нанизано $\mathbf{2009}$ бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг?

Задача № 5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

Задача № 6. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты. $\Big(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учета порядка.$\Big)$

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXII Московская математическая олимпиада

10 класс 15.03.2009

Задача № 1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на $\mathbf{847}$ рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее $\mathbf{30\%}$?

Задача № 2. Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

Задача № 3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

Задача № 4. На кольцо свободно нанизано $\mathbf{2009}$ бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг?

Задача № 5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

Задача № 6. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты. $\Big(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учета порядка.$\Big)$

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo