Московская олимпиада по физике, 2015/2016, нулевой тур,

заочное задание (ноябрь), 11-й класс

Автор: Бычков А.И.

Заочное задание (ноябрь) состоит из пяти задач. За решение каждой задачи участник получает до *4 баллов* по результатам автоматической проверки ответов и до *6 баллов* на основании проверки развёрнутого ответа. Всего участник может получить до *50 баллов*.

Задача 1. Закреплённая пушка, установленная на горизонтальной поверхности земли, стреляет под углом α к горизонту, причём снаряды вылетают из пушки с начальной скоростью v_0. После первого выстрела снаряд упал на расстоянии L от пушки. Второй выстрел оказался неудачным, и на некоторой высоте снаряд разорвался на два осколка массами m и $2m$. Первый, легкий осколок, упал на землю на расстоянии $\frac{L}{2}$ от пушки, а второй осколок в момент падения первого осколка находился строго над ним. Определите расстояние s между осколками к моменту падения на землю первого осколка. Получите ответ в виде общих формул и в частном случае: $\alpha = 60°$, $v_0 = 80$ м/с, $m = 5$ кг, $g = 10\ \frac{\text{м}}{c^2}$.

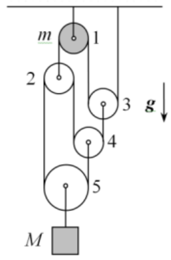
Возможное решение. Центр масс двух осколков "полетит" по той же параболической траектории, по которой двигался снаряд при первом выстреле: его ускорение по теореме о движении центра масс определяется суммой всех сил тяжести, приложенных к осколкам, и общей их массой, т. е. тем же уравнением, что и движение целого снаряда. Как только первый осколок ударится о землю к внешним силам – силам тяжести – добавится сила реакции земли, и движение центра масс исказится. Но в нашем случае необходимо найти расстояние s между двумя осколками к моменту падения первого осколка, когда второй находился строго над ним, а это означает, что осколки и центр масс будут лежать на одной вертикали. К этому моменту центр масс системы находится на расстоянии $\frac{L}{2}$ от пушки и на высоте $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 240$ *м*. Значит, расстояние между двумя осколками к моменту падения первого осколка равно: $s = \frac{3}{2}H = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 360$ *(м).*

Так как второй осколок к моменту падения первого находился строго над ним, следовательно, горизонтальные составляющие скорости осколков после разрыва снаряда равны: $v_0 \cos\alpha = 40$ м/с.

Ответ: в общем виде – $s = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$, $v_{1x} = v_{2x} = v_0 \cos\alpha$, в частном случае – $s = 360$ (*м*), $v_{1x} = v_{2x} = 40$ (*м/с*).

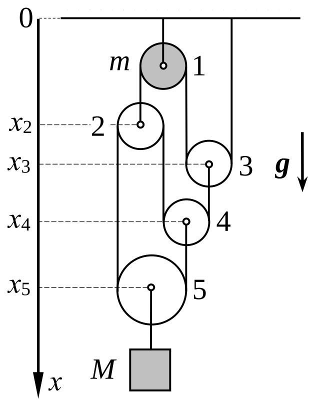
Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование формул для криволинейного равноускоренного движения в поле тяжести земли; правильное использование закона сохранения импульса.

Критерии оценок (автоматическая проверка ответов). За правильные ответы на вопросы о горизонтальной составляющей скорости осколков к моменту падения первого осколка участник получает по *2 балла*.



Задача 2. Найдите величины и направления ускорений осей всех блоков, изображённых на рисунке. Массы бруска и верхнего блока равны соответственно M и m. Остальные блоки невесомы, нить также невесома и нерастяжима. Трение в осях блоков пренебрежимо мало. Нити по блокам не проскальзывают, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны. В начальный момент система покоилась.

Возможное решение. Поскольку блок 4 невесом, сила натяжения нижней нити (прикреплённой к оси блока 5) равна нулю, и $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{g}$. Из невесомости блоков 2 и 3 следует равенство нулю силы натяжения также и верхней нити, перекинутой через блоки 1 и 3. Стало быть, массивный блок 1 вращаться не будет, и положения блоков 2 и 3 будут неизменными. Блок 3, очевидно, вращаться тоже не будет. Для определения ускорения оси блока 4 и направлений вращения блоков 2, 4 и 5, выразим длину l нити, перекинутой через блоки 2, 4 и 5, через координаты соответствующих блоков:



$$l = x_4 - x_3 + x_4 - x_2 + x_5 - x_2 + x_5 - x_4 + \delta = -2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + \delta,$$

где δ — сумма длин полуокружностей блоков 2, 4 и 5, а x_2 и x_3 постоянны. Дважды дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\ddot{x}_4 + 2\ddot{x}_5 = 0,$$

откуда

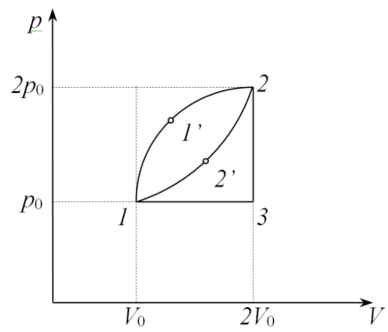
$$\ddot{x}_4 = -2\ddot{x}_5 = -2g\ .$$

Ответ: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_5 = g$, $a_4 = -2g$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, ω_4 — вращаются по часовой, ω_2 и ω_5 — против.

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За доказательство равенств нулю натяжения нижней и верхней нити – *2 балла* (по баллу за каждое равенство). За правильное использование 2 закона Ньютона для тел системы – *2 балла*. За уравнение кинематической связи для ускорений – *2 балла*.

Критерии оценок (автоматическая проверка ответов). За правильные ответы на вопросы о направлении вращения блоков участник получает по *2 балла*.

Задача 3. А) Определите КПД η циклического процесса *11'231*, который совершается с одноатомным идеальным газом. pV-диаграмма цикла изображена на рисунке. Кривая *11'2* на диаграмме – четверть дуги окружности (при соответствующем выборе масштабов). Объём газа в цикле меняется в диапазоне от V_0 до $2V_0$, давление меняется в диапазоне от p_0 до $2p_0$. Минимальная температура газа равна $T_0 = 120$ К, а количество вещества составляет $\nu = 1$ моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).



Б) Разделим данный цикл некоторой дугой *12'2* так, как показано на рисунке. КПД цикла *12'231* равен η_1. Определите КПД цикла *11'22'1*.

Возможное решение. А) Площадь прямоугольника, в который вписан данный цикл, соответствует работе p_0V_0 (при данном выборе масштабов этот прямоугольник выглядит как квадрат). Работа, которую совершил газ за цикл *11'231* во столько раз меньше p_0V_0, во сколько раз площадь четверти круга меньше площади квадрата. Поэтому:

$$A = p_0V_0\left(\frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{R^2}\right) = \frac{1}{4}\pi p_0V_0 = \frac{1}{4}\pi\nu RT_0 \cong 0{,}78 \text{ кДж}.$$

КПД цикла *11'231* посчитаем по формуле: $\eta = \frac{A}{A+|Q_-|}$. Газ отдавал теплоту в процессе *231*. По первому началу термодинамики:

$$|Q_-| = \frac{c_v}{R}(4p_0V_0 - 2p_0V_0) + \frac{c_p}{R}(2p_0V_0 - p_0V_0) = p_0V_0\left(2\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}p_0V_0 \cong 5{,}5 \quad (\text{кДж}).$$

Тогда:

$$\eta = \frac{A}{A+|Q_-|} = \frac{\frac{1}{4}\pi p_0V_0}{\frac{1}{4}\pi p_0V_0+\frac{11}{2}p_0V_0} = \frac{\pi}{\pi+22} \cong 12{,}5\%.$$

Б) Из формулы для КПД следует: $|Q_-| = Q_+(1-\eta)$.

Тогда для цикла *11'22'1*: $|Q_{22'1}| = Q_{11'2}(1-\eta_2)$.

Для цикла *12'231*: $|Q_{231}| = Q_{12'2}(1-\eta_1)$.

Для цикла *11'231*: $|Q_{231}| = Q_{11'2}(1-\eta)$.

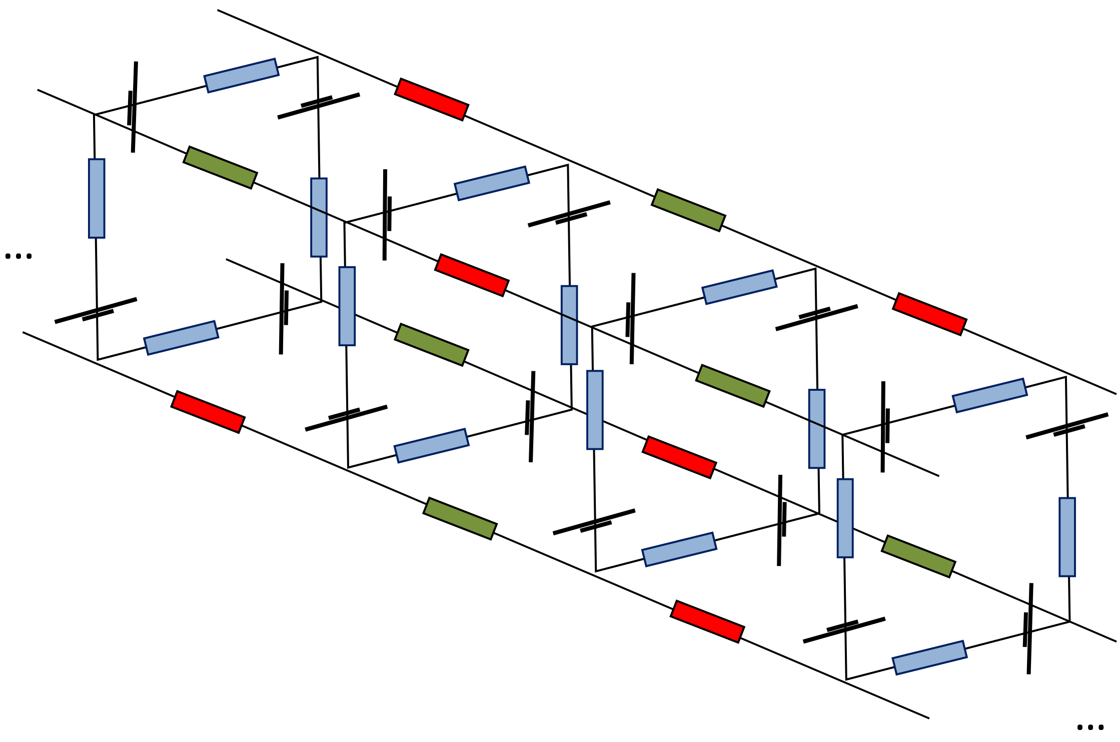
Значит, $(1-\eta_1)(1-\eta_2) = (1-\eta) \Rightarrow \eta_2 = \frac{\eta-\eta_1}{1-\eta_1} = \frac{\frac{\pi}{\pi+22}-\eta_1}{1-\eta_1}$.

Ответ: $\eta = \frac{\pi}{\pi+22}$, $A = \frac{1}{4}\pi p_0V_0$, $\eta_2 = \frac{\frac{\pi}{\pi+22}-\eta_1}{1-\eta_1}$.

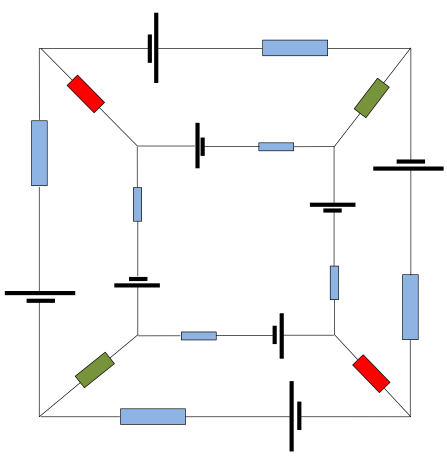
Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. Посчитан КПД цикла (*11'231*) – *3 балла*. Найден КПД цикла (*11'22'1*) – *3 балла*. Если участник не довел решение до правильного ответа, он может получить до *2* *утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование формулы для КПД; правильное использование первого начала термодинамики и формул для работы, количества теплоты и внутренней энергии газа.

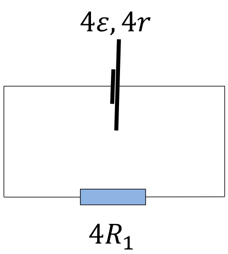
Критерии оценок (автоматическая проверка ответов). За правильные ответы на вопросы о работе за цикл и отданном количестве теплоты получает по *2 балла*.

Задача 4. Имеется цепочка, которая состоит из 2015 проволочных кубов, содержащих одинаковые источники напряжения с внутренними сопротивлениями r и внешние нагрузки R_1 (синие), R_2 (красные) и R_3 (зелёные), соединённых так, как показано на рисунке. При каком значении сопротивления R_1 на внешних нагрузках будет выделяться максимальная суммарная мощность (значения R_2 и R_3 красных и зелёных резисторов известны)? Получите ответ в виде общей формулы и в частном случае $\varepsilon = 2$ В, $r = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Изобразите график зависимости мощности, выделяющейся на синем резисторе, от его сопротивления $P_c(R_1)$.



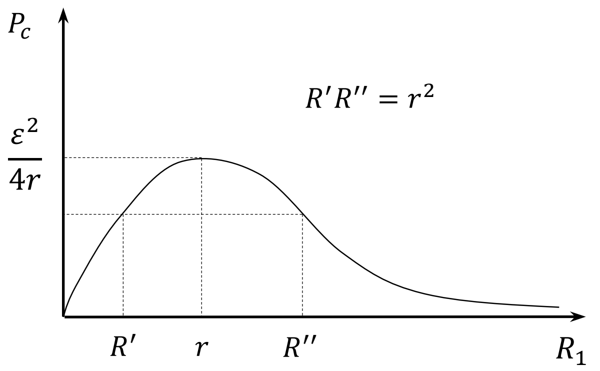
Возможное решение. Если рассмотреть два любых соседних контура (с источниками), которые соединены красными и зелёными нагрузками так, как показано на рисунке справа, то из симметрии следует, что по этим нагрузкам ток не течет. Следовательно, во всей цепочке ток через красные и зелёные нагрузки течь не будет. Значит, $P_к = P_з = 0$ Вт. Остается рассмотреть схему, изображённую на левом рисунке. На нагрузке $4R_1$ выделяется мощность равная:





$$P_{с} = \left(\frac{\varepsilon}{r+R_1}\right)^2 R_1.$$

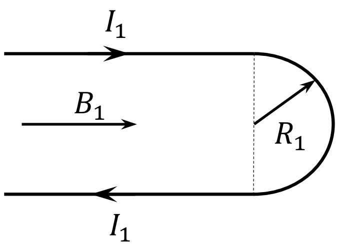
Если изучить функцию $P_{с}(R_1)$, то оказывается, что максимальное значение эта функция принимает при $r = R_1 = 1$ Ом. При этом на одном синем резисторе будет выделяться мощность равная $P_{с} = \frac{\varepsilon^2}{4R_1} = 1$ Вт. Качественно график $P_{с}(R_1)$ выглядит следующим образом:



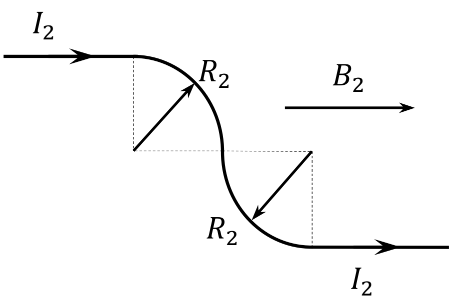
Ответ: в общем виде – $r = R_1$, $P_{к} = P_{з} = 0$ Вт, $P_{с} = \frac{\varepsilon^2}{4R_1}$, в частном случае – $r = 1$ Ом, $P_{с} = \frac{\varepsilon^2}{4R_1} = 1$ Вт.

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За правильное обоснование того, что в бесконечной цепочке ток через красные и зелёные нагрузки течь не будет – *2 балла*. Найдена зависимость $P_{с}(R_1)$ – *1 балл*. Приведён качественный график $P_{с}(R_1)$ – *2 балла*. Если обосновано, что максимальная суммарная мощность, которая выделяется на внешних нагрузках, достигается при равенстве R_1 и r, тогда участник получает *1 балл*.

Критерии оценок (автоматическая проверка ответов). За правильный ответ на вопрос о суммарной мощности, выделяющейся на нагрузках в одном квадратном контуре, получает 4 балла.

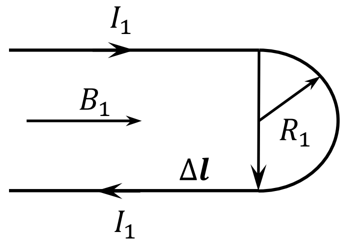


Задача 5. А) Проводник с током I_1, состоящий из двух параллельных участков, соединённых проволочной полуокружностью радиусом R_1, помещён в однородное магнитное поле индукцией B_1, направленное вдоль параллельных участков провода (см. рис.). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.



Б) Решите предыдущую задачу в случае, когда провод состоит из двух параллельных участков, которые соединены двумя проволочными четвертями окружностей радиусом $R_2 = 10$ см, как показано на рисунке. Ток в проводе $I_2 = 30$ А, вектор индукции однородного магнитного поля $B_2 = 1$ Тл направлен вдоль параллельных участков провода.

Возможное решение. А) На провода, параллельные вектору индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, не действует сила Ампера. Разобьем проволочную полуокружность на элементы тока. На каждый элемент тока действует сила Ампера равная:



$$\boldsymbol{F}_i = I[\Delta\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}].$$

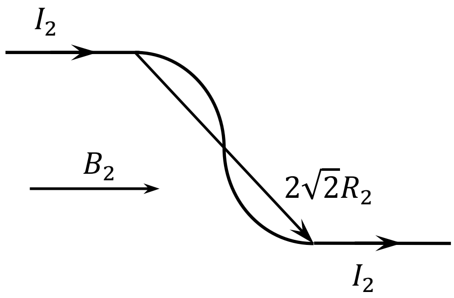
Сила, действующая на весь проводник, равна векторной сумме сил, действующих на элементы тока:

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i I[\Delta\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}] = I\left[\sum_i \Delta\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}\right] = I[\Delta\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}],$$

где $\Delta\boldsymbol{l}$ – вектор, соединяющий начальную и конечную точки проволочной полуокружности. Окончательно получаем:

$$F_1 = I_1 \cdot 2R_1 \cdot B_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2I_1R_1B_1.$$

Б) Аналогично предыдущему пункту получаем (см. рис.):



$$F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 30 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \text{ (Н)}.$$

Ответ: А) $F_1 = 2I_1R_1B_1$, Б) $F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 6$ (Н).

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За правильное обоснование того, что на провода, параллельные вектору индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, не действует сила Ампера – *2 балла*. Найдена сила в виде общей формулы в пункте А), с которой магнитное поле действует на провод с током – *2 балла*. Найдена сила в виде общей формулы в пункте Б), с которой магнитное поле действует на провод с током – *2 балла*.

Критерии оценок (автоматическая проверка ответов). За правильный ответ на вопрос о направлении силы, с которой магнитное поле действует на провод с током, в задаче 5А – *2 балла*. За правильный численный ответ на вопрос о силе, с которой магнитное поле действует на провод с током, в задаче 5Б – *2 балла*.