Задача 1

Школьник летом был в Крыму и с высоты$h = 4$ м над уровнем моря увидел на линии горизонта ракетный крейсер «Москва», который шел вдоль берега и был виден «во весь рост», от ватерлинии до верха надстроек. Школьник прикрыл один глаз,вытянул перед собой руку и большим пальцем, поднятым вверх, «закрыл» весь крейсер от носадо кормы корабля(для открытого глаза). Ширина пальца равна a = 2 см. Расстояние от глаза до большого пальца при вытянутой руке равно l = 70 см. День был солнечным, поэтому диаметр зрачка открытого глаза был небольшим – всего 1 мм. Затем он через свой смартфон нашел справку о параметрах крейсера, где обнаружил, что длина корабля составляет $L = 186{,}5$ м. Каков радиус R Земли, вычисленный школьником на основании всех имеющихся данных?

Ответ: $R \approx \dfrac{l^2 L^2}{2ha^2} \approx 5326$ км.

Критерии

Записана формула для расстояния X от школьника до крейсера (то есть до линии горизонта) – 2 балла.

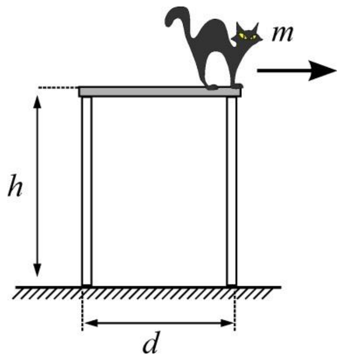
Применена теорема Пифагора (связь между X, R и h) – 2 балла.

Получено выражение для радиуса Земли (точное или приближенное) – 3 балла.

Получен численный ответ для радиуса Земли – 3 балла.

ВСЕГО: 10 баллов.

Задача 2



На краю табуретки массой M = 4,5 кг сидит кошка массой m = 1,5 кг. Высота табуретки h = 45 см, а расстояние между ножками d = 30 см (см. рис.). Коэффициент трения между ножками и полом равен μ = 0,5. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным g = 10 м/с^2.

Ответ: табуретка будет оставаться неподвижной, если модуль ускорения центра масс кошки не превысит $a = \dfrac{gd}{h}\left(\dfrac{M}{2m}+1\right) \approx 16{,}67$ м/с^2; при превышении этого значения на малую величину табуретка начнёт опрокидываться.

Критерии

Записаны выражения для горизонтальной и вертикальной составляющих силы, действующей на табуретку в момент отрыва кошки от табуретки – 2 балла (по 1 баллу за каждое выражение).

Записано уравнение моментов для случая опрокидывания табуретки без проскальзывания – 1 балл.

Найдено пороговое значение модуля ускорения центра масс кошки (полученное в предположении, что проскальзывания табуретки по полу нет, и раньше начинается опрокидывание) – 2 балла (1 балл за формулу и 1 балл за численное значение).

Записан второй закон Ньютона для табуретки в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси в предположении, что табуретка начинает скользить до начала опрокидывания – 1 балла.

Записана связь между модулем силы трения и модулем силы нормальной реакции опоры – 1 балл.

Найдено пороговое значение модуля ускорения центра масс кошки (полученное в предположении, что проскальзывание табуретки по полу есть, и что проскальзывание начинается раньше) – 2 балла (1 балл за формулу и 1 балл за численное значение).

Из сравнения найденных пороговых значений ускорений сделан вывод о том, что когда табуретка начнёт опрокидываться, она ещё не начнёт проскальзывать – 1 балл.

ВСЕГО: 10 баллов.

Задача 3

Вася выдувает через длинную трубку сферический мыльный пузырь. Надув пузырь до некоторого размера, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит наружу обратно через трубку. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время τ после того, как его перестали надувать. За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считайте, что воздух движется по трубке достаточно медленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

Ответ: пузырь вдвое большего радиуса сдуется за время, равное 16τ.

Критерии

Указано, что добавочное давление внутри пузыря, создаваемое мыльной пленкой, обратно пропорционально радиусу пузыря – 1 балл.

Указано, что при медленном течении воздуха в трубке сила, обусловленная Лапласовым давлением, уравновешивается силами трения воздуха о стенки трубки – 1 балл.

Укаазано, что силы трения воздуха о стенки трубки пропорциональны величине V средней скорости движения воздуха в трубке – 1 балл.

Сделан вывод о том, что $V \sim 1/R$ – 1 балл.

Записано, что скорость убывания объема пузыря обратно пропорциональна радиусу пузяря – 2 балла.

Получено дифференциальное соотношение, связывающее малое изменение радиуса пузыря с малым промежутком времени, за которое оно произошло – 1 балл.

Найдено, что время «сдувания» пузыря пропорционально четвертой степени радиуса – 2 балла.

Получен ответ – 1 балл.

ВСЕГО: 10 баллов.

Задача 4

В бесконечную проволочную сетку, состоящую из шестиугольников с сопротивлениями каждого ребра r (см. рис. 1),добавили проводники с такими же сопротивлениями – так, как показано на рис. 2 (каждую шестиугольную ячейку разделили тремя отрезками проволоки сопротивлением rкаждый на три одинаковых ромба). Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B, показанными на рис. 2.

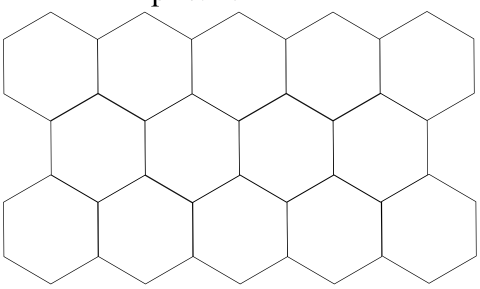


Рис. 1

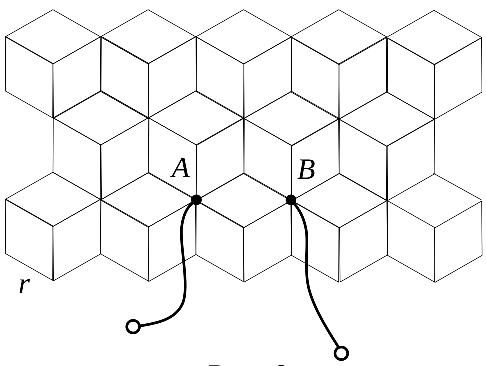


Рис. 2

Ответ: сопротивление между точками A и B равно $R_{AB} = \frac{1}{2}r$.

Критерии

Правильно рассмотрено распределение токов по проводникам, прилегающим к узлам A и B для случая, когда ток течет от узла A в бесконечность – 2 балла.

Правильно рассмотрено распределение токов по проводникам, прилегающим к узлам A и B для случая, когда ток течет из бесконечности к узлу B – 2 балла.

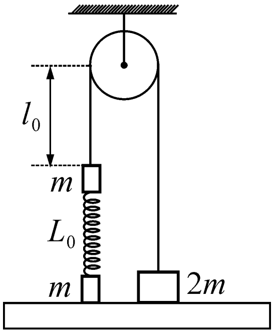
Замечено, что протекание тока из узла A в узел B может быть представлено как суперпозиция (сумма) двух предыдущих случаев – 2 балла.

Найдены токи, текущие по отрезкам AC и CB – 2 балла.

Найдено сопротивление между точками A и B – 2 балла.

ВСЕГО: 10 баллов.

Задача 5



На рисунке изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикрепленной к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз $2m$ лежит на горизонтальной опоре. Груз m висит. К грузу m через невесомую идеальную пружину с жесткостью k, расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0, прикреплен второй такой же груз m. В начальный момент пружина не деформирована, и второй груз m лежит на той же опоре, что и груз $2m$. Расстояние от верхнего груза m до блока равно l_0. Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (ее быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение τ?

Ответ: блока первым коснулся верхний груз m; это могло произойти через максимальное время $\tau_{max} = \pi\sqrt{3m/(4k)}$, которое обеспечивается при $l_0 = mg/(2k)$.

Критерии

Укаазано, какой груз первым коснулся блока – 1 балл.
Записано уравнение кинематической связи для грузов m и $2m$, привязанных к нити – 1 балл.
Модуль f силы упругости пружины выражен через координаты грузов – 1 балл.
Записаны уравнения динамики (второй закон Ньютона) для каждого из трех грузов – 1 балл.
Записано уравнение кинематической связи для грузов массами m – 1 балл.
Система уравнений динамики сведена к уравнению гармонических колебаний – 1 балл.
Найдена максимальная величина времени τ, равная половине периода колебаний – 1 балл.
Найдено, при каком значении l_0 время τ максимально – 3 балла.