Уважаемые участники олимпиады,

Перед тем как приступить непосредственно к решению задач – прочтите, пожалуйста, правила и рекомендации, подготовленные жюри специально для вас.

Правила и рекомендации для участников олимпиады

1. **Что можно иметь на столе**? При себе можно иметь ручку (чёрную или синюю), линейку, карандаш, цветные карандаши или фломастеры, точилку, ластик, обыкновенный калькулятор, ваш личный вариант заданий и бланк для решений, бутылку с водой и шоколадку.
2. **Можно оставить телефон в кармане?** В течение всей олимпиады не допускается использование и наличие при себе (в карманах) мобильных устройств, умных часов и прочих средств связи, а также программируемых калькуляторов. Их можно положить в закрытую сумку в выключенном состоянии. При нарушении этого правила участник может быть удалён из аудитории, а его работа – аннулирована без права обжалования.
3. **Чего ещё нельзя делать?** В течение всей олимпиады не допускается общение с другими участниками. За разговоры, передачу записок и другие подобные действия участник может быть удалён из аудитории, а его работа – аннулирована без права обжалования.
4. **Чем писать?** Решения и ответы записывать необходимо только ручкой. Использование карандашей допускается только при рисовании графиков, если имеется такая необходимость. Решения, записанные карандашами, проверяться не будут.
5. **Что можно писать?** В работе не допускаются никакие другие записи и рисунки кроме как решения задач и графики к ним. При наличии любых посторонних рисунков или записей работа может быть аннулирована полностью, т.к. они могут служить условным сигналом для идентификации личности кому-либо из организаторов или членов жюри.
6. **Есть ли черновик, проверяется ли он**? У каждого из вас есть бланк с листами для решений. Оборотную сторону каждого листа вы можете использовать в качестве черновика. Черновики (=оборотные стороны листов) проверяться не будут, поэтому не забудьте перенести решения из черновика в чистовик. Если для решения вам потребуется больше одной страницы – используйте новый лист и указывайте номер листа, на котором членам жюри нужно искать продолжение решения.
7. **У меня есть больше одного решения, что делать?** При наличии нескольких решений в работе проверяется только первое, поэтому не забудьте зачеркнуть всё лишнее.
8. **Мне нужно сделать исправление, как?** Если вам необходимо зачеркнуть большой кусок решения, перечеркните его, пожалуйста, двумя линиями – крестом. Если вы передумаете и решите, что зачеркнутую ранее часть решения все-таки стоит отдать на суд жюри – припишите рядом с зачеркнутой частью «Считать не зачёркнутой» и подчеркните эту надпись. Если Вы снова передумаете – зачеркните надпись, тогда эта часть решения проверяться не будет.
9. **А что если у меня остались вопросы?** Если у вас появился вопрос по условию, вы обнаружили опечатку, вам стало плохо, вам нужно выйти и т.д. – поднимите руку. К Вам подойдёт организатор в вашей аудитории, и ответит на ваши вопросы или пригласит того, кто сможет Вам помочь.
10. **Что-нибудь ещё?** Мы советуем участникам сначала быстро ознакомиться со всеми задачами, чтобы оптимально распределить свои усилия между ними, а затем уже приступать к решению. Не волнуйтесь и не переживайте, не обязательно решить все задания – главное не упустить те из них, в которых вы можете показать себя наилучшим образом.

Успехов!

Задача 1, «Кто девушку ужинает, тот её и танцует» – 10 баллов

Главным производственным предприятием города Байкальска Иркутской области долгое время являлся печально известный Байкальский целлюлозно-бумажный комбинат. Известность этого комбината была печальна в связи с тем, что отходы от его производства попадали в Байкал, нанося серьёзный ущерб экологии этого уникального озера. Несмотря на многочисленные обращения защитников природы, окончательно остановить вредное производство удалось лишь в 2013 году. Проблема заключалась в том, что комбинат был градообразующим предприятием, то есть он кормил целый город. На момент остановки предприятия на нём трудились 2000 человек, а население города составляло 13 000 человек. Объясните, как так получается, что от одной шестой населения может зависеть благосостояние целого города?

Решение и критерии оценивания:

В задаче имеется в виду мультипликативный эффект: работники тратят зарплату, которую они получают на заводе, на товары и услуги, производимые другими жителями города, давая им доход, а те, в свою очередь, тратят свой доход в городе и так далее. Полный балл в задаче даётся за чёткое описание этого эффекта. Название прекрасно, но не обязательно.

Критерии:
10 баллов за логичное обоснование идеи о мультипликативном эффекте.
В других случаях:
2 балла – за идею о том, что от работников завода зависят их семьи, а значит они обеспечивают достаточно значимую долю домохозяйств.
2 балла – за идею о том, что работники завода могут являться значительной частью трудоспособного населения, зарабатывающего и платящего налоги в городе.
1-2 балла – за другие имеющие экономический смысл идеи, в зависимости от релевантности и наличия пояснений.
Суммарно за хорошие идеи без основной – про мультипликативность – не более 6 баллов.

Задача 2, «Многогранная личность» – 25 баллов

Вася хочет изготовить правильный многогранник из стали и покрыть его сплавом драгоценных металлов. Один кубический сантиметр стали стоит 1 рубль. Покрытие одним квадратным сантиметром сплава также обойдётся в 1 рубль. Технология производства следующая: отливается шар из стали, срезается лишний металл, на заготовку наносится тончайший слой сплава драгоценных металлов. Остатки стали, которые срезали с многогранника, приходится выбрасывать.

Удовлетворённость Васи многогранником зависит от того, насколько он сложный (сколько у него граней N) и насколько блестящий, что описывается следующей функцией:

$$U = \sqrt{N} \times S - M,$$

где M – затраты Васи на производство, а S – площадь поверхности.

Справка: правильный многогранник – это такой выпуклый многогранник, у которого все грани равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер.

1) (15 баллов) Если правильные многогранники, из которых может выбирать Вася, – это куб, тетраэдр (пирамида с треугольником в основании) и октаэдр (многогранник, гранями которого являются 8 равносторонних треугольников), какой многогранник выберет Вася?

2) (10 баллов) Какой многогранник выберет Вася, если он умеет делать все возможные правильные многогранники?

Справка:

Правильный многогранник – это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией.

Формулы радиуса сферы, вписанной в:

Додекаэдр – $r = \frac{a}{4}\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}$

Икосаэдр – $r = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3 + \sqrt{5})$

Формулы радиуса сферы, описанной около:

Додекаэдра – $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5})$

Икосаэдра – $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Решение и критерии на следующей странице.

Пункт а)
Куб:

$$\begin{cases} N = 6 \\ S = 6a^2 \\ R = a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 6 \\ a = R\frac{2}{\sqrt{3}} \\ S = 8R^2 \end{cases} \Rightarrow U_6 = (\sqrt{6} - 1)8R^2 - V(R)$$

Октаэдр:

$$\begin{cases} N = 8 \\ S = 8a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \\ R = a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 8 \\ a = R\sqrt{2} \\ S = 4\sqrt{3}R^2 \end{cases} \Rightarrow U_8 = (\sqrt{8} - 1)4\sqrt{3}R^2 - V(R)$$

Заметим, что полезность от куба больше полезности от октаэдра при любом радиусе начального шара. Это значит, что куб точно лучше октаэдра.
Тетраэдр:
Заметим, что тетраэдр можно вписать в сферу, описаную вокруг куба так, что каждая вершина тетраэдра будет совпадать с одной из вершин куба (Это значит, что у них одна описаная сфера), а ребра тетраэдра будут диагоналями граней куба. Смитри Рис. 1
Тогда

$$U_4 = (\sqrt{4} - 1)S_4 - V(R)$$

Заметим, что в этом случае площадь поверхности тетраэдра меньше пложади поверхности куба, так как сумма площадей боковых граней любой пиамиды меньше площади ее основания (как неравенство треугольника только для объемной фигуры).
Так как $(\sqrt{4} - 1) < (\sqrt{6} - 1)$ и $S_\gamma < S_\alpha$, то и полезность от куба всегда больше полезности от тетраэдра.
Так как при любом радиусе начального шара он выбирает куб, а значит и в оптимуме он выберет куб.
Таким образом, мы показали, что он выберет куб.

Пункт б)
Заметим, что отношение радиусов описанной и вписаной сферы вокруг додекаэдра равно:

$$\frac{R_{12}}{r_{12}} = \frac{(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$$

Несложно проверить, что и у икосаэдра это отношение равно той же величине.
Это значит, что если эти две фигуры вписать в одну сферу, то и вписаные сферы у них будут совпадать.
Это значит, что отношение площадей поверхности икосаэдра и додекаэдра (если они вписаны в одну сферу) не может превышать отношения радиусов вписаной и описаной сферы, так как пложадь поверхности каждого больше площади поверхности вписаной сферы и меньше площади поверхности описаной сферы.

Докажем, что $U_{20} > U_{12}$ для любого радиуса начального шара.
Заметим, что

$$\frac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{12}-1} > \frac{R_{12}}{r_{12}} = \frac{R_{20}}{r_{20}} > \frac{S_{12}}{S_{20}} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{20}-1)S_{20} + V(R) > (\sqrt{12}-1)S_{12} + V(R) \Rightarrow U_{20} > U_{12}$$

Значит, из этих двух фигур он выберет икосаэдр.
Заметим, что как и в случае с тетраэдром, можно вписать одну из фигур в додекаэдр.
А именно, куб можно вписать в додекаэдр так, что каждая вершина куба будет совпадать с одной из вершин додекаэдра, а его ребра будут лежать на ребрах додекаэдра. Смитри Рис. 1
Далее аналогично рассуждениям в пункте а) можно показать, что куб хуже додекаэдра.
Это значит, что он выберет додекаэдр.

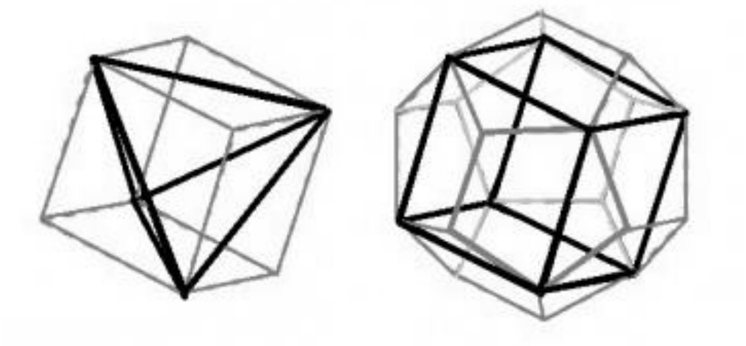


Рис. 1

При правильном решении пункта любым способом ставился полный балл.

Критерии оценивания при наличии ошибок в решении:

За найденный радиус описанной сферы куба или октаэдра - 1 балл

За найденный радиус описанной сферы тетраэдра - 2 балла

За найденную площадь поверхности одной фигуры - 1 балл

За формулу объема шара - 1 балл

За идею того, что необходимо максимизировать полезность от каждой фигуры - 1 балл

За идею того, что максимумы нужно сравнить - 1 балл

Идея того, что тетраэдр можно вписать в куб так, что радиус описанной окружности будет одинаков - 2 балла

За выписанное число граней икосаэдра и додекаэдра - 1 балл

Описана логика решения второго пункта - 2 балла

Задача 3, «Какой товар, такие и издержки» – 20 баллов

Компания «Ёлки-иголки» занимается производством новогодних ёлок. На недавнем собрании обсуждались неудачные продажи в этом году: прибыль была отрицательной и составила $\mathbf{-5}$ условных единиц. Компания необычная, её кривая предельных издержек имеет нестандартный вид:

$$MC(Q) = \begin{cases} 20 - 2Q, & 0 \le Q < 5 \\ \dfrac{7Q}{10} - \dfrac{1}{2}, & 5 \le Q < 15 \\ 30 - Q, & 15 \le Q < 20 \\ \dfrac{2Q}{5}, & 20 \le Q < 25 \\ 20, & Q \ge 25 \end{cases}$$

Кривая предельной выручки также имеет похожий специфический вид:

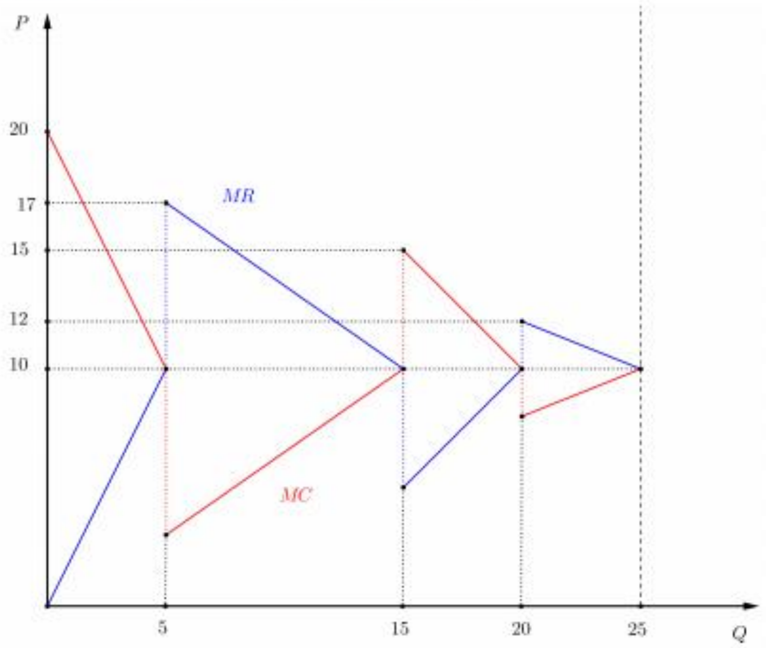
$$MR(Q) = \begin{cases} 2Q, & 0 \le Q < 5 \\ \dfrac{41}{2} - \dfrac{7Q}{10}, & 5 \le Q < 15 \\ Q - 10, & 15 \le Q < 20 \\ 20 - \dfrac{2Q}{5}, & 20 \le Q < 25 \\ 0, & Q \ge 25 \end{cases}$$

Причины столь плохих результатов были выявлены почти сразу: главный экономист компании пропускал лекции по микроэкономике в университете и что-то слышал про правило MR = MC, но совершенно не умеет им пользоваться. К тому же он перепутал графики MR(Q) и MC(Q)! Совет сразу же уволил его и открыл вакансию нового главного экономиста, на которую Вы теперь претендуете. Все кандидаты должны решить следующие задачи (фирма может продавать нецелое количество ёлок: кому-то нужны только иголки):

1) (3 балла) Изобразить правильный график предельных издержек и предельной выручки.
2) (6 баллов) Найти количество ёлок, которое фирма произвела в прошлом году.
3) (8 баллов) Посчитав ожидаемую прибыль от выбранного им выпуска, бывший главный экономист решил воспользоваться правилом «Если нет разницы – зачем производить больше?». Сколько произвела фирма по его совету с учётом этого правила?
4) (3 балла) На сколько нужно изменить выпуск, чтобы наконец-то производить оптимальное количество ёлок (в сравнении с пунктом 3)? Какую прибыль получит фирма при таком выпуске?

Решение и критерии оценивания на следующей странице.

а) Для начала построим график издержек: (3 балла)



Примечание: За неточночти в графиках возможно снятие 1-2 баллов в зависимости от ошибки

б) Вполне очевидно, что фирма зарабатывает, когда график MR выше, чем MC и терпит убытки, когда все наоборот.

За идею о вычислнии прибыли - 2 балла

Можно найти сколько фирма будет зарабатывать. Для этого рассчитаем площади между кривыми MR и MC.

$S_1 = 50$; $S_1 = 70$; $S_1 = 25$; $S_1 = 10$.

За непосредственное вычисление прибыли в точках MR=MC - 3 балла

Теперь, посмотрим какие прибыли могла получать фирма в точках MR = MC.

$$\pi(Q) = \begin{cases} -50, Q = 5 \\ 20, Q = 15 \\ -5, Q = 20 \\ 5, Q = 25 \end{cases}$$

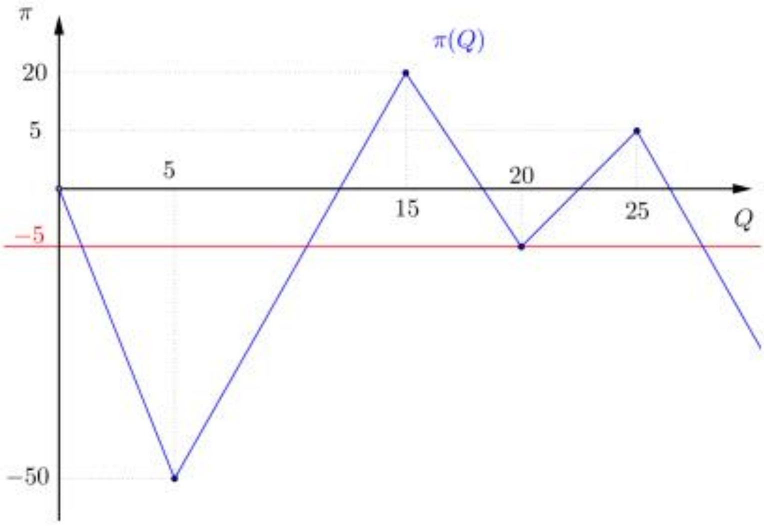
За вывод о том, что $Q^* = 20$ - 1 балл

Значит, в этом году фирма производила $Q = 20$ ёлок.

Примечание: *Возможно решение через вычисление функций общей выручки и общих издержек, НО стоит понимать, что по функции MR можно востановить TR только с точностью до константы, которая будет различна на всех предложенных отрезках.*

в)

Если экономист решил воспользоваться правилом «Если нет разницы – зачем производить больше», то он должен был найти уровни выпуска, приносящие такую же прибыль, и выбрать наименьший из них. Проще всего это сделать нарисовав график прибыли и прямую $\pi = -5$, и найдя значение выпуска в точке с наименьшим Q.



Нам подходят первые две точки (в третьей точке MR = MC). Но по условию задачи мы должны брать минимальное Q , поэтому правильным отметом будет $Q_1 = 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2}$, которое можно вычислить как площадь трапеции.

Пусть при произвольном Q^* полощадь между кривыми MC и MR будет равна 5, тогда $S = \frac{Q^*(20-4Q^*)}{2} = 5$, решив квадратное уравнение и отбросив больший корень находим правильный ответ: $Q^* = 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2}$

За вычислечние правильного ответа - 5 баллов

За обоснование того, что это именно он (сравнить со значением во второй точке или показать через график выше) - 3 балла

г) Из предложенного выше решения видно, что оптимальным выпуском для фирмы является $Q^* = 15$, в этой точке фирма заработает $\pi = 20$. Тогда, фирме нужно увеличить свой выпуск на $10 + \frac{3\sqrt{10}}{2}$

За определение оптимального количества - 2 балла

За вычислечние правильного ответа - 1 балл

Задача 4, «Сильная и независимая женщина» – 30 баллов

У Зои есть две радости в жизни: обнимашки и сладости. Также она иногда работает и получает доход в размере 50 000 у.е., который может потратить в своё удовольствие. Если она обнимается, но не ест сладкого, её удовольствие описывается функцией:

$U(h) = -5000 + 65h - 3\sqrt{h} + 2h^2$.

Если она поедает сладости в одиночестве, функция её удовольствия выглядит иначе:

$U(s) = -12000 + 2160s - 18s^2$.

Совмещать сладости и обнимашки она тоже любит, но только в определённой пропорции – за каждые два часа обнимашек ей надо съесть 3кг конфет, тогда каждый час будет приносить ей 1500 единиц удовольствия. Также во время обнимашек нужно поддерживать минимальную жизнедеятельность, на что уходит 500 у.е. в час. У источника обнимашек есть свои запасы конфет, из которых он готов отдавать Зое по полкило в час. Этих запасов хватит на первые 40 часов. В магазине конфеты стоят 750 у.е. за килограмм, но для оптовых покупателей цены другие – при покупке более 50 кг за раз килограмм конфет обходится всего лишь в 500 у.е.

Каждую сэкономленную 1 у.е. Зоя оценивает в 1 единицу удовольствия.

а) (5 баллов) Выпишите функцию удовольствия Зои от совмещения сладостей и обнимашек.

б) (15 баллов) Постройте график бюджетного ограничения Зои (линию, показывающую, какие наборы товаров может заполучить Зоя на её доход, полностью расходуя его).

в) (10 баллов) Найдите и объясните оптимальное распределение её дохода между сладким, обнимашками и сэкономленными деньгами, при котором она получит максимальное удовольствие. Не забудьте указать как распределение, так и величину удовольствия.

Решение и критерии оценивания:

а) Функция удовольствия Зои от совмещения сладостей и обнимашек: $U(h,s) = 1500 * \min(h; \frac{2s}{3})$

Если в решении полезность от денег добавлена в функции удовольствия, то она принимает вид (с учетом акции и бонусов):

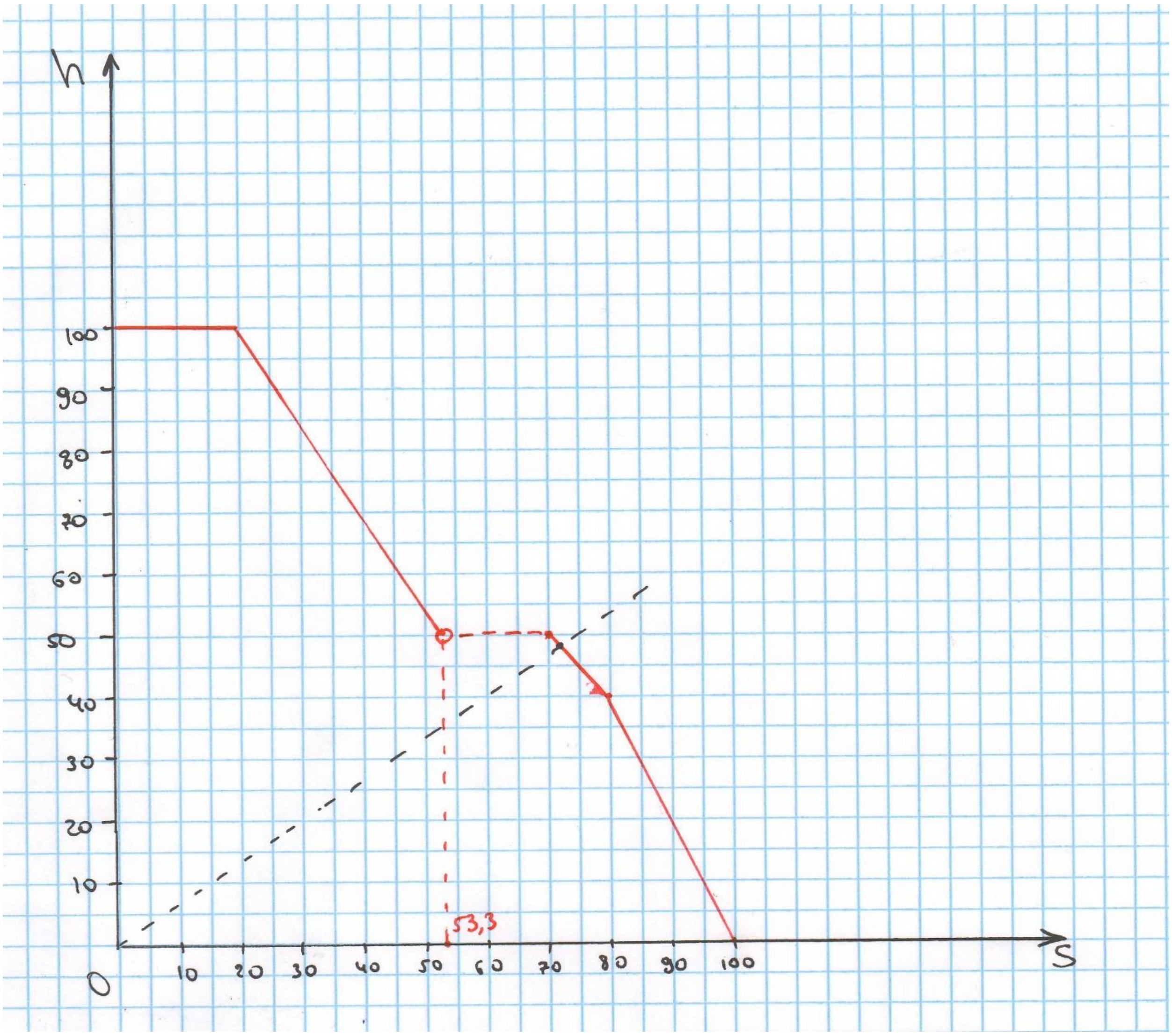
$$U(h,s) = \begin{cases} \min\left(h; \frac{2}{3}s\right) * 1500 + 50000 - 125h - 750s; s < 50, h < 40 \\ \min\left(h; \frac{2}{3}s\right) * 1500 + 50000 - 250h - 500s; h < 40, s - \frac{h}{2} > 50 \\ \min\left(h; \frac{2}{3}s\right) * 1500 + 50000 - 500h - 500(s-20);\ h > 40, s > 70 \end{cases}$$

Критерии оценивания:

Использование функции min () – 3 балла

Верные коэффициенты при h и s – 2 балла

б)



Критерии:

Верный график – 15 баллов.

Не учтены бонусные +20 конфет в верхней части графика – 9 баллов

Вообще не учтены бонусные конфеты от обнимашек – 3 балла

График отражает не максимально возможные комбинации – 3 балла

Неверные точки разрыва – 1 балл

Прямая линия бюджетного ограничения – 0 баллов

в) Необходимо сравнить три точки, в которых $U(h) = \max, h \in [0, 100]$, $U(s) = max, s \in [0,100]$, $U(h, s) = max$, с учетом бюджетного ограничения.

Функция $U(h)$ на участке [0; 100] монотонно возрастает по h, следовательно, функция достигает своего максимума в точке **h=100**. $U(h = 100) = -5000 + 6500 - 3 * 10 + 2 * 10000 = \mathbf{21470}$

Функция $U(s)$ – парабола с ветвями вниз, следовательно, максимум будет достигаться в вершине.

$$U'(s) = 2160 - 18 * 2s = 0$$
$$\boldsymbol{s = 60}$$
$$U(s = 60) = -12000 + 2160 * 60 - 18 * 60^2 = 52800$$

Более того, Зоя сберегает 20000 у.е., что суммарно приносит ей **72800** единиц удовольствия

Максимальная доступная Зое точка, где соблюдена нужная пропорция конфет к обнимашкам при совместном потреблении – (**s=72, h=48**).$U = \min\left(48; \frac{2*72}{3}\right) * 1500 = \boldsymbol{72000}$

Таким образом получается, что выгодней всего сильной и независимой Зое поедать конфеты в одиночестве и сберегать оставшиеся деньги.

Если в решении удовольствие от сбережений было дополнительно введено в функции удовольствия, принцип решения остается тем же, но с другими значениями:

Функция $U(h)$ на участке [0; 100] монотонно возрастает по h, следовательно, функция достигает своего максимума в точке **h=100**. $U(h = 100) = -5000 + 6500 - 3 * 10 + 2 * 10000 + 50000 - 500 * 100 = \boldsymbol{21470}$

Функцию удовольствия от конфет нужно рассматривать на двух участках, так как меняется цена. На каждом из участков найти максимум и сравнить между собой

$$U(s) = -12000 + 2160s - 18s^2 + 50000 - 750s, s < 50$$
$$U'(s) = 2160 - 36s - 750 \Rightarrow s = \frac{235}{6}$$
$$\boldsymbol{U\left(s = \frac{235}{6}\right) = 65612,5}$$

$U(s) = -12000 + 2160s - 18s^2 + 50000 - 500s, s \geq 50$

$U'(s) = 2160 - 36s - 500 \Rightarrow x = \frac{415}{9} < 50.$

$U(\boldsymbol{s = 50}) = -12000 + 2160 * 50 - 18 * 50^2 + 50000 - 500 * 50$ = **76000**

Максимальное удовольствие от потребления в комплекте так же будет равно 72000. Таким образом, верный ответ – покупать 50 кг конфет по цене 500 и сберегать оставшиеся деньги.

<u>Критерии (вне зависимости от изменений в функциях удовольствия):</u>

Каждая найденная верно точка для сравнения – +1 балл

Каждый верный уровень удовольствия в точке – +2 балла

Верный ответ – +1 балл.

Задача 5, «Тот, кто стучит в дверь» – 15 баллов

Гражданину Белякову 50 лет, он учитель химии в одной из городских старших школ. За эту работу он получает $4000 в месяц. Кроме того, он подрабатывает на автомойке, где зарабатывает ещё примерно $1000 в месяц. У него есть жена и сын-школьник, а также скоро появится дочь. После своего пятидесятого дня рождения гражданин Беляков узнал, что болен раком лёгких и ему осталось жить буквально полгода. Прикинув ожидаемые расходы на поддержание дома, автомобиль, образование для детей и прочее, он определил сумму, оставив которую он обеспечит своей семье безбедное будущее и жизнь на проценты по вкладам на долгие годы вперёд – $737 000. Его текущая заработная плата не позволяет за прогнозируемое ему время накопить такую сумму денег, поэтому он решил пересмотреть своё отношение к жизни и попробовать использовать свой талант химика в полной мере, занявшись производством редкой и ценной субстанции. Производство субстанции сопряжено с определёнными рисками – за её специфические свойства она была запрещена, и её производство преследуется по закону. Однако познания гражданина Белякова в химии позволяют ему готовить продукт высочайшего качества и продавать его по цене значительно выше обычной – по $2000 за унцию (эту сумму производитель получит на руки). За неделю на локальном рынке можно продать до 4 фунтов субстанции. Производство придётся открывать с партнёром, а прибыль от реализации в этом случае будет делиться между ними пополам. Чтобы освободить время для приготовления субстанции, гражданину Белякову придётся отказаться от работы на мойке, но из школы он уйти не может – он не может подставлять свою семью, а значит, должен держать свою новую деятельность в тайне от них, и работа в школе поможет это сделать. Даже в былые времена заработок нашего гражданина не позволял семье делать сбережений, а теперь ему и вовсе придётся тратить всю легальную зарплату на обязательные расходы по содержанию дома и семьи. Вдобавок ко всему остальному, ему нужно проходить ещё и дорогостоящее лечение, расходы на которое составляют $10 000 в неделю.

1) (3 балла) Полиция в городе пока не очень сильно интересуется ограничением продажи субстанции, поэтому она достаточно редко находит точки её продажи и конфискует её – всего в 5 % случаев. За сколько недель гражданин Беляков сможет собрать нужную ему сумму, если больше ничего ему не мешает, а деньги ему придётся хранить в вентиляционной системе своего дома?
2) (9 баллов) Брат гражданина Белякова – сотрудник полиции – решил встать на тропу войны с субстанцией, увеличив процент конфискаций до 15. Кроме того, он решил искать главных виновников – производителей, из-за чего над нашим гражданином нависла угроза быть пойманным и отправленным в тюрьму. Поскольку работа оставляет следы, вероятность быть пойманным равна p на первой неделе производства и возрастает на 1 процентный пункт каждую неделю. Если производителя поймают, то у него заберут все деньги, которые он на этом заработал. Гражданин Беляков перфекционист. Узнав всё это в процессе обдумывания решения и посчитав всё, он понял, что рискует не заработать необходимой суммы за отведённое ему время (24 недели), и поэтому решил даже не открывать производство. При каких значениях p он мог принять такое решение?
3) (3 балла) Оглядываясь назад, гражданин Беляков понял, что мог бы давать частные уроки химии и зарабатывать на этом дополнительные $3000 в месяц, которые мог бы сберегать на будущее. Инфляция в стране составляет 1 %, а процент по вкладам – 1,5. Начав сберегать в каком возрасте, наш гражданин смог бы получить на своём счету необходимую сумму к пятидесяти годам?

Решение и критерии оценивания:

1) Для ответа на вопрос задачи нам необходимо посчитать еженедельную сумму, которую Беляков будет получать на руки после всех перераспределений и оплаты расходов. По условию вся легальная зарплата уходит на оплату дома и прочие обязательные траты, а значит её можно не учитывать. Получается, Беляков получит половину денег от продажи 4 фунтов субстанции с учётом конфискации 5% и за вычетом расходов на лечение:

$$\pi = \frac{2\,000 \times 16 \times 4}{2} \times 0.95 - 10\,000 = 50\,800$$ – 1.5 балла

Тогда легко посчитать срок, за который он получит необходимую сумму в 737 000:

$$t = \frac{737\,000}{50\,800} = 14{,}508$$ – 0.5 балла

Это значит, что за 14 недель он ещё не соберёт нужной суммы, но зато соберёт за 15.

Ответ: 15 недель - 1 балл

Критерии при отличающемся решении:

1 балл за весь пункт – если при расчёте суммы еженедельного дохода было потеряно одно из условий: разделение средств с партнёром, конфискация 5% субстанции, учёт расходов на лечение.

1 балл за весь пункт – если учтена легальная зарплата, но не учтены бытовые расходы и наоборот.

За ответ «14.5 недель» баллы не снимались.

2) С учётом увеличившегося процента конфискаций, ожидаемый недельный заработок гражданина Белякова (в случае если его не поймают) изменился:

$$\pi = \frac{2\,000 \times 16 \times 4}{2} \times 0.85 - 10\,000 = 44\ 400 - 1 \text{ балл}$$

Вероятность поимки на n-ой неделе: (p+n-1)% - (1 балл при отсутствии дальнейшего решения или неправильном решении). Чтобы посчитать ожидаемый заработок на n-ой неделе с учётом того, что Беляков потеряет все деньги, если его поймают, можно «переформулировать» задачу так:

Каждую неделю все уже заработанные деньги Беляков «сдаёт», после чего играет в лотерею, в которой либо получает назад все «сданные» деньги и ещё 44 400 бонусом с вероятностью $1 - \frac{p+n-1}{100}$, либо ничего не получает с вероятностью $\frac{p+n-1}{100}$. Как только Беляков получает первый 0 – игра заканчивается. Значит, он получит выигрыш на n-ой неделе только если его не поймают ни на одной из предыдущих. Тогда ожидаемый заработок на n-ой неделе:

$$44\,400 \times n \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p+1}{100}\right) \dots \left(1 - \frac{p+n-1}{100}\right) = 44\,400\, n \prod_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{p+n-1}{100}\right)$$ (2 балла)

По условию Беляков не открывает производство, если рискует не заработать необходимую сумму за 24 недели, а значит выражение выше нужно переписать для n=24 и сравнить с 737 000.

$$44\,400 \times 24 \times \prod_{n=1}^{24}\left(1-\frac{p+n-1}{100}\right) < 737\,000$$

$$1\,065\,600 \prod_{n=1}^{24}\left(1-\frac{p+n-1}{100}\right) < 737\,000$$

$$\prod_{n=1}^{24}\left(1-\frac{p+n-1}{100}\right) < 0.692$$

$$\prod_{n=1}^{24}\left(1-\frac{p+n-1}{100}\right) < 0.692 \text{ (1 балл)}$$

Для наглядности распишем:

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(0.99-\frac{p}{100}\right)\left(0.98-\frac{p}{100}\right)\ldots\left(0.77-\frac{p}{100}\right) < 0.692$$

Заметим, что

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(0.99-\frac{p}{100}\right)\left(0.98-\frac{p}{100}\right)\ldots\left(0.77-\frac{p}{100}\right) < 1 \times 0.99 \times 0.98 \times \ldots \times 0.77$$

Заметим так же, что $0.77 \times 0.78 = 0.601 < 0.692$. Нетрудно заметить, что в правой части предыдущего неравенства 0.77×0.78 домножается на несколько значений, меньших единицы. Следовательно,

$$1 \times 0.99 \times 0.98 \times \ldots \times 0.77 < 0.692$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(0.99-\frac{p}{100}\right)\left(0.98-\frac{p}{100}\right)\ldots\left(0.77-\frac{p}{100}\right) < 0.692, \forall p$$

2 балла за правильное рассуждение.

Может быть он сможет заработать нужную сумму быстрее?

$$\frac{(737\,000)}{44\,400} = 16.599 - 1 \text{ балл}$$

Значит, даже если бы гражданина Белякова не пытались поймать, ему бы потребовалось 17 недель на сбор необходимой суммы. 100-17-83, а значит вероятность собрать нужную сумму за семнадцать недель была бы меньше 83%, при необходимых 0.97 (737 000 / 754 800) – 1 балл. Очевидно, что при всех $n \in [17; 24]$, вероятность поимки растёт слишком стремительно, и прирост платежа не способен это компенсировать. Таким образом мы проверили, что при любом p гражданин Беляков не стал бы открывать производство – 1 балл.

Критерии в случае неправильных или альтернативных решений:

Ответ «Риск не заработать нужную сумму есть всегда, т.к. вероятность поимки как минимум со второй недели станет выше 0» и подобные ему оценивались в 0 баллов.

Ответ «При вероятности поимки выше 50% Беляков уйдет с рынка, поэтому …» и подобные ему оценивались в 0 баллов.

Ответ «Беляков уйдёт с рынка при вероятности поимки 100%, поэтому…» и подобные ему оценивались в 0 баллов.

Если в решении присутствовала попытка посчитать ожидаемый платёж (хоть и неверная) решение оценивалось от 2 до 7 баллов, в зависимости от тяжести допущенных ошибок.

3) Поскольку в вопросе задачи спрашивается о сроке, за который на счету гражданина Белякова будет собрана необходимая сумма, мы должны посчитать только номинальное количество денег на счету. Годовая ставка процента нам дана.

Каждый месяц гражданин мог бы откладывать по $3 000. Тогда ежемесячный процент по вкладу был бы $(1.015)^{\frac{1}{12}}$

Тогда сумма на вкладе на конец n-ного месяца будет считаться следующим образом:

$$3\,000 \times (1.015)^{\frac{n}{12}} + 3\,000 \times (1.015)^{\frac{n-1}{12}} + \cdots + 3000 \times (1.015)^{\frac{1}{12}} + 3\,000$$

И нам надо найти такое n, при котором эта сумма больше или равна 737 000:

$$3\,000 \times (1.015)^{\frac{n}{12}} + 3\,000 \times (1.015)^{\frac{n-1}{12}} + \cdots + 3\,000 \times (1.015)^{\frac{1}{12}} + 3\,000 \geq 737\,000$$

Заметим, что эта сумма – сумма членов геометрической прогрессии. Такая сумма рассчитывается по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{где } b_1 - \text{первый член прогрессии, а } q - \text{её знаменатель.}$$

В нашем случае $b_1 = 3000$, $q = (1.015)^{\frac{1}{12}}$, тогда:

$$S_n = \frac{3\,000 \times \left((1.015)^{\frac{n}{12}} - 1\right)}{(1.015)^{\frac{1}{12}} - 1}$$

Если имеющийся калькулятор умеет вычислять только квадратные корни, можно заметить, что $(1.015)^{\frac{1}{8}} \sim 1.0019$, а $(1.015)^{\frac{1}{16}} \sim 1.0009$, из чего можно сделать вывод, что $(1.015)^{\frac{1}{12}} \sim 1.001$. Если же он позволяет считать корни 2 и 3 или любой степени, то $(1.015)^{\frac{1}{12}} = 1.0012$. Отсюда:

$$S_n = \frac{3\,000 \times \left((1.015)^{\frac{n}{12}} - 1\right)}{0.0012}$$

$$S_n = 200\,000 \times \left((1.015)^{\frac{n}{12}} - 1\right)$$

$$2\,500\,000 \times \left((1.015)^{\frac{n}{12}} - 1\right) \geq 737\,000$$

$$(1.015)^{\frac{n}{12}} - 1 \geq 0.2948$$

$$(1.015)^{\frac{n}{12}} \geq 1.2948$$

$$\frac{n}{12} = \log_{1.015} 1.2948$$

$$n = 12 \log_{1.015} 1.2948$$

Если имеющийся под рукой калькулятор умеет вычислять логарифмы, то n=208.2. Тогда количество лет, которое потребуется на накопление нужной суммы - $\log_{1.015} 1.2948 = 17.4$. Тогда, чтобы накопить нужную сумму к 50 годам, гражданину Белякову нужно было начать сберегать в 32 года (или 32 года и 7 месяцев).

Если же калькулятор такого не позволяет, то ответ можно записать в виде:

$50 - \log_{1.015} 1.2948$

Критерии оценивания:

За полностью правильное решение ставилось 3 балла.

Если участник принимал ставку в 1.5% за ежемесячную - такой подход принимался и оценивался аналогично решению для годовой ставки (с поправкой на изменения в численных значениях).

Если в работе присутствовало объяснение, что можно пренебречь ежемесячными процентами в связи с малым их значением (0 при округлении до второго знака после запятой), решение с начислением процентов только в конце года (без капитализации) считалось верным и оценивалось из критериев, аналогичных оригинальному решению.

Если был использован в явном виде тот факт, что при маленьких значениях сумма чисел примерно равна их произведению и ежемесячный процент считался как 1.5/12=0.125 %/мес, такое решение считалось верным и оценивалось из критериев, аналогичных оригинальному решению.

За правильный ход решения с реальными процентами (с поправкой на изменения в численных значениях) ставилось 2 балла.

При отсутствии полностью правильного решения:

1 балл ставился за правильную формулу суммы вклада в конце срока хранения с учётом сложных процентов.

1 балл ставился за расчёт количества месяцев/лет, необходимых для заработка 737 000 методом ежемесячного откладывания 3 000/ежегодного откладывания 36 000 без начисления процентов.