1. *Ответ*. Нет, не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -b, \tag{1}$$

$$x_1 x_2 = c. \tag{2}$$

Предположим, что утверждение задачи верно, тогда

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 = -\frac{b+1}{2}, \tag{3}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \frac{c+1}{2}. \tag{4}$$

Подставим (1) в (3) и найдем $b = 5$.

Подставим (1) и (2) в (4) и найдем $c = 9$.

Стало быть, искомый квадратный трехчлен, если он существует, имеет вид $x^2 + 5x + 9$. Однако же дискриминант такого трехчлена отрицателен. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна.

2. *Ответ*. Красного.

Решение. Заметим, что если число b^n синего цвета, то число b тоже синего цвета (доказывается от противного). Так как $1024 = 2^{10}$, из этого следует, что число 2 синее.

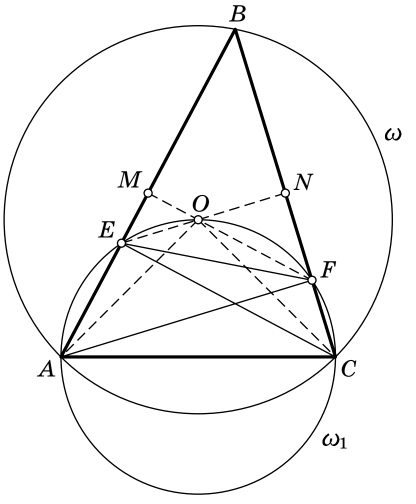
Также заметим, что если число a синего цвета, то любое число $n \cdot a$ ($n \in \mathbb{N}$) тоже синего цвета (следует из условия задачи при помощи принципа математической индукции). Значит, поскольку 2 синее, то все четные числа также синие.

Предположим, что 2017 синего цвета. Тогда все нечетные числа, начиная с 2017, тоже будут синего цвета. Таким образом, все числа, начиная с 2017, синие. По условию, мы используем оба цвета. Это значит, что какое-то нечетное число k ($k < 2017$) покрашено в красный цвет. Но тогда и любая степень k тоже красная. Так как $k \geqslant 2$, то существует степень, которая превосходит 2017. Получается, что она одновременно покрашена и в синий, и в красный цвета, что невозможно. Поэтому 2017 может быть только красного цвета.

Красным оно как раз будет, если мы покрасим все четные числа в синий цвет, а нечетные — в красный. Легко убедиться, что данная раскраска удовлетворяет условию задачи.

3. *Ответ*. $\angle B = 45^\circ$.

Первое решение. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника ABC, через ω_1 — окружность, описанную около ACO. Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle AOC = 2\beta$, как центральный для угла ABC относительно окружности ω. $\angle AEC = \angle AOC = 2\beta$, как опирающиеся на дугу AC окружности ω_1. Так как угол AEC внешний для треугольника CEB, $\angle ECB = 2\beta - \beta = \beta$, значит, треугольник CEB — равнобедренный. Аналогично, $\angle AFC = 2\beta$, угол AFC внешний для



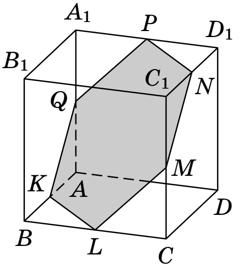
треугольника AFB, значит, $\angle BAF = \beta$, треугольник ABF тоже равнобедренный.

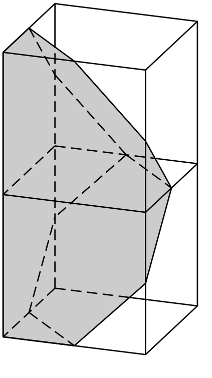
По формуле длины основания равнобедренного треугольника $AB = 2 \cdot BF \cdot \cos\beta$ и $BC = 2 \cdot BE \cdot \cos\beta$. Перемножив эти равенства, получим: $AB \cdot BC = 4 \cdot BE \cdot BF \cdot \cos^2\beta$. Кроме того, из отношения площадей треугольников ABC и AEF, данного в условии, получаем: $\dfrac{S_{BAC}}{S_{BEF}} = \dfrac{AB \cdot BC}{BE \cdot BF} = 2$. Отсюда следует, что $1 = 2 \cdot \cos^2\beta$. Так как $2\beta < 180^\circ$, имеем $\cos\beta > 0$, значит, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45^\circ$.

Второе решение. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника ABC, через ω_1 — окружность, описанную около ACO. Заметим, что $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle AOC$, так как угол AOC — центральный для угла ABC относительно окружности ω. Также заметим, что $\angle BEO = \angle OCA$, так как угол BEO дополняет угол AEO до 180°, а угол AEO опирается на дополнительную дугу для дуги окружности ω_1, на которую опирается угол ACO. Заметим, что $\dfrac{1}{2}\angle AOC + \angle ACO = 90^\circ$, так как треугольник AOC равнобедренный ($AO = CO$ как радиусы окружности ω). Значит, $\angle ABC + \angle BEO = 90^\circ$, т. е. прямая EO — высота в треугольнике BEC (перпендикулярная стороне BC). Аналогично, FO — высота в треугольнике AFB. Так как O — центр описанной окружности треугольника ABC, то высоты EO и FO делят стороны AB и CB соответственно пополам. Пусть M и N — середины AB и BC, тогда треугольник BMN подобен BFE, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{2}$ (так как отрезок EF делит площадь ABC пополам, т. е. площадь треугольника BFE равно половине площади треугольника ABC; а площадь треугольника BMN равна четверти площади треугольника ABC, так как M и N — середины сторон AB и CB соответственно). Поэтому, если рассмотреть окружность, построенную на EF как на диаметре (радиуса r), то $MN = \sqrt{2} \cdot r$ и угол ABC равен полуразности соответствующих дуг этой окружности, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$.

4. *Ответ*. Да, могут.

Решение. Будем решать обратную задачу: посмотрим, как можно разрезать куб на две части, чтобы из них можно было сложить многогранник только с треугольными и шестиугольными гранями. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим середины его сторон AB, BC, CC_1, C_1D_1, A_1D_1, AA_1 через K, L, M, N, P и Q соответственно. Известный факт: эти шесть точек лежат в одной плоскости и образуют правильный шестиугольник (так называемое «главное сечение куба»). Разрежем куб по этой плоскости (см. рис. слева) и склеим две полученные части (они равны между собой, так как центрально-симметричны) по пятиугольникам $ADCLK$ и $C_1B_1A_1PN$. Полученный многогранник (см. рис. справа) имеет четыре треугольных и четыре шестиугольных грани, то есть может быть тем многогранником, про который говорил Вася.





5. *Ответ.* При всех натуральных n, не кратных трем.

Решение. Заметим, что n, кратное трем, нам не подойдет, поскольку при $k = n + 1$ мы получим, что число с суммой цифр, не кратной 3, будет делиться на 3. Покажем, что все остальные числа нам подойдут.

Рассмотрим случай, когда n не кратно двум, трем и пяти. Так как n взаимно просто с 9, то найдется $m \leqslant n$ такое, что $9m \equiv -k \pmod{n}$. Тогда $10 \cdot m + 1 \cdot (k - m) \,\vdots\, n$.

Существует такое d, что $10^d \equiv 1 \pmod{n}$. Действительно, среди остатков чисел 10, 10^2, 10^3, ..., 10^n по модулю n должны быть два одинаковых (поскольку всего $n - 1$ ненулевой остаток). Пусть это остатки степеней 10^a и 10^b ($a < b$), тогда $10^{a-b} \equiv 1 \pmod{n}$, так как 10 и n взаимно просты. (По теореме Эйлера $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. в качестве d может быть выбрано число $\varphi(n)$ всех чисел от 1 до n, взамно простых с n.)

Значит,

$$N = ((10^{d+1} + 10^{2d+1} + \ldots + 10^{md+1}) + \\ + (10^d + \ldots + 10^{(k-m)d})) \,\vdots\, n,$$

при этом несложно заметить, что сумма цифр числа N равна k.

Осталось рассмотреть случай, когда $n = n_0 \cdot 2^i \cdot 5^j$, где n_0 не кратно двум, трем и пяти. В этом случае мы уже умеем строить число N_0 с суммой цифр k, кратное n_0. Тогда $N = N_0 \cdot 10^{i+j}$ по-прежнему будет иметь сумму цифр k, но теперь уже будет кратно n.

6. *Ответ.* $3^{12} = 531\,441$.

Решение. Будем решать задачу в общем случае, когда число банд равно N при $N \geqslant 2$. Докажем, что максимальное число гангстеров равно 3^n, если $N = 3n$; $4 \cdot 3^{n-1}$, если $N = 3n + 1$; $2 \cdot 3^n$, если $N = 3n + 2$. Для удобства обозначим эти величины через $g(N)$, причем будем также считать $g(0) = g(1) = 1$. Сразу заметим, что $g(m)g(k - m) \leqslant g(k)$ для любых k, m (для которых эти выражения имеют смысл) — это свойство пригодится в дальнейшем.

Пример строится следующим образом: разобьем все банды на группы по три и, возможно, одну группу из двух или четырех банд и объявим враждующими банды, попавшие в одну группу. Тогда максимальное количество гангстеров — это количество способов выбрать по одной банде из каждой группы, т. е. $3^{N/3}$, $4 \cdot 3^{(N-4)/3}$ или $2 \cdot 3^{(N-2)/3}$ соответственно.

Докажем, что больше чем $g(N)$ гангстеров быть не может. Обозначим через $f(N)$ максимально возможное число гангстеров при $N \geqslant 2$, для $N = 0$, 1 положим $f(0) = f(1) = 1$. Нам нужно доказать, что $f(N) \leqslant g(N)$. Будем доказывать это по индукции. База $N = 2$ очевидна.

Предположим, что для всех значений $N < k$, уже доказано, что $f(N) \leqslant g(N)$. Докажем для $N = k$. Рассмотрим граф вражды банд. Если он несвязен, то его вершины можно разбить на два подмножества размера m и $k - m$, не соединенных между собой ребрами. Если рассматривать только банды из первого подмножества, то некоторые из рассматриваемых $f(k)$ гангстеров могут состоять в одинаковых наборах банд, при этом по предположению индукции может получиться не более $f(m)$ различных наборов. Аналогично, для второго подмножества может получиться не более $f(k - m)$ различных наборов. При этом если для двух гангстеров совпадает и набор банд из первого подмножества, в которых они состоят, и набор банд из второго подмножества, в которых они состоят, то для них совпадают все банды, а это запрещено условием. Значит, всего гангстеров не более $f(m)f(k - m)$. Тогда имеем:

$$f(k) \leqslant f(m)f(k-m) \leqslant g(m)g(k-m) \leqslant g(k).$$

Теперь рассмотрим случай связного графа. Пусть в нашем графе есть вершина V степени не меньше чем 3. Оставим только гангстеров, состоящих в банде V, и распустим банду V и все враждующие с ней банды. Заметим, что условие задачи осталось выполненным, поскольку ни один из гангстеров, состоявших в V, не состоял в бандах, враждующих с V, а значит, по-прежнему любые два гангстера состоят в разном наборе банд. Поскольку было распущено не менее четырех банд, это означает, что число гангстеров, состоявших в банде V, было не больше, чем $f(k - 4)$. С другой стороны, количество гангстеров, не состоящих в банде V, будет не больше чем $f(k - 1)$, поскольку можно убрать банду V и оставить гангстеров, не состоявших в ней, и условие задачи по-прежнему будет выполняться. Таким образом,

$$f(k) \leqslant f(k-1)+f(k-4) \leqslant g(k-1)+g(k-4) \leqslant g(k).$$

Остался случай, когда граф вражды банд — связный граф, в котором все вершины имеют степень не больше 2. Тогда этот граф — цепочка из k вершин или цикл на k вершинах. Если $k \leqslant 4$, то очевидно, что $f(k) \leqslant g(k)$. Иначе возьмем три последовательных вершины, не являющиеся крайними в цепочке. Очевидно, что минимум в одну из этих банд входит каждый гангстер, при этом в каждую из этих трех банд входит не более чем $f(k-3)$ гангстера, так как если гангстер входит в банду, то он не входит в две враждующие с ней, а относительно остальных $k-3$ банд и гангстеров, входящих в выбранную банду, условие задачи продолжит выполняться. Имеем:

$$f(k) \leqslant 3f(k-3) \leqslant 3g(k-3) \leqslant g(k).$$

Таким образом, $f(k) \leqslant g(k)$ и оценка доказана. Тогда, если банд 36, то максимальное количество гангстеров равно $3^{12}=531441$.

Комментарий. Задача в общем виде была решена в работе Дж. У. Муна и Л. Мозера в 1965 году (*Moon J. W., Moser L.* On cliques in graphs // Israel J. Math. — 1965. — V. 3. — P. 23–28.).