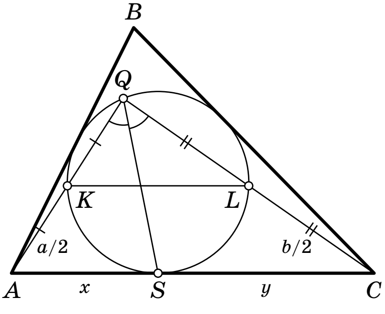
1. *Ответ*. 1520.

Решение. Заметим сразу, что и до, и после перестановки цифр число делится на 10 и поэтому должно оканчиваться на 0. Покажем, что нет трехзначных чисел, обладающих описанным в условии задачи свойством. Действительно, если $\overline{ab0} = 100a + 10b = 80k$ и $\overline{ba0} = 100b + 10a = 80l$, $a < b$, то цифры a и b четны, причем $\overline{ba0} - \overline{ab0} = 90(b-a) = 80(l-k)$, поэтому $b - a$ делится на 8. Это возможно только при $b = 8$, $a = 0$, но 0 не может быть первой цифрой числа.

Попробуем найти требуемое число среди четырехзначных чисел, начинающихся с 1, т. е. чисел вида $\overline{1ab0} = 1000 + 100a + 10b$. Если поменять местами цифры 1 и b, то оно не будет делиться на 80. Если переставить цифры a и b, $a < b$, то аналогично рассуждению для трехзначных чисел получаем единственный вариант $b = 8$, $a = 0$, но число 1080 не кратно 80. Значит, может подойти только число, в котором переставлены цифры 1 и a, где $a > 1$. Если числа $\overline{1ab0}$ и $\overline{a1b0}$ кратны 80, то их разность $\overline{a1b0} - \overline{1ab0} = 900(a-1)$ также кратна 80, т. е. $900(a-1) = 80m$, $45(a-1) = 4m$. Значит, $a - 1$ делится на 4, что возможно только при $a = 5$ или $a = 9$. Но уже при $a = 5$ и $b = 2$ получаем число $1520 = 19 \cdot 80$, удовлетворяющее условию задачи, так как $5120 = 64 \cdot 80$.

2. *Первое решение.* Пусть K и L — середины отрезков AQ и QC соответственно, которые по условию лежат на вписанной окружности (см. рисунок). Отрезок KL — средняя линия в треугольнике AQC, поэтому $KL \parallel AC$. Параллельные прямые KL и AC высекают на вписанной окружности равные дуги KS и SL. Значит, опирающиеся на них углы KQS и SQL равны.



Второе решение. Пусть $AQ = a$, $QC = b$, $AS = x$, $SC = y$. По теореме о касательной и секущей имеем $a \cdot \dfrac{a}{2} = x^2$, $b \cdot \dfrac{b}{2} = y^2$. Отсюда следует, что $x : a = y : b$, т. е. точка S делит сторону AC треугольника AQC на части, пропорциональные прилежащим сторонам. В таком же отношении эту сторону делит и основание биссектрисы угла Q в этом треугольнике. Поскольку точка, делящая отрезок в заданном отношении, определена однозначно, отрезок QS совпадает с биссектрисой.

Комментарий. Отметим следующий любопытный факт: описанная около треугольника AQC окружность касается вписанной в треугольник ABC окружности в точке Q. Действительно, если O — точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная Q, то $\angle QKO = \angle QLO = 90^\circ$ как опирающиеся на диаметр, поэтому O является точкой пересечения серединных перпендикуляров KO и LO треугольника AQC, т. е. центром его описанной окружности, причем общая точка Q этих окружностей лежит на линии их центров. (Этот факт можно обосновать и иначе: гомотетия с центром в точке Q и коэффициентом 2 переводит вписанную окружность треугольника ABC в описанную окружность треугольника AQC, поэтому эти окружности касаются в точке Q.) Утверждение задачи следует теперь из *леммы Архимеда*: если окружность вписана в сегмент окружности, стягиваемый хордой AC, и касается дуги в точке Q, а хорды — в точке S, то прямая QS является биссектрисой угла AQC.

3. *Ответ.* а) $x_0 > y_0$; б) 0.

Решение. Для краткости обозначим степень 2017 через n.

а) Заметим, что $y_0 > 1$, так как $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0 > 0$. Аналогично, поскольку x_0 удовлетворяет уравнению $x_0^n - x_0 = 1 > > 0$, то и $x_0 > 1$. Следовательно, $1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0$, так как это неравенство равносильно неравенству $(1 - x_0)^2 > 0$, которое выполнено при $x_0 \neq 1$. Тогда $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0 = = y_0^{2n} - y_0$. Поскольку функция $f(t) = t^{2n} - t$ строго возрастает при $t > 1$ (так как при этих t имеем $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 1 > 0$), получаем $x_0 > y_0$.

б) Проверим, что $x_0 < 1 + \frac{1}{n}$. Действительно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \vartheta_n - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n} + \vartheta_n > 1$$

при $n \geqslant 3$ (через $\vartheta_n > 0$ обозначены остальные слагаемые биномиального разложения), а значит, в силу возрастания при $t > 1$ функции $g(t) = t^n - t$ справедливо неравенство $x_0 < 1 + \frac{1}{n}$.

Далее, вычтем из равенства $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2$ равенство $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0$. Получим

$$x_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) = (1 - x_0)^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку

$$x_0^{2n} - y_0^{2n} = (x_0 - y_0)(x_0^{2n-1} + x_0^{2n-2}y_0 + \ldots + x_0y_0^{2n-2} + y_0^{2n-1}) > > 2n(x_0 - y_0),$$

справедливы неравенства

$$(2n-1)(x_0 - y_0) \leqslant x_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом,

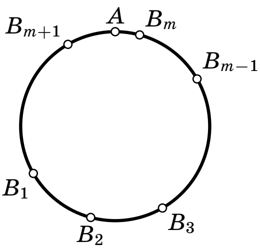
$$0 < x_0 - y_0 < \frac{1}{(2n-1)n^2} = \frac{1}{2017^2 \cdot 4033} < \frac{1}{16 \cdot 10^9} < \frac{1}{10^{10}},$$

а значит, первые 10 знаков после запятой разности $x_0 - y_0$ равны нулю.

4. *Ответ.* 75.

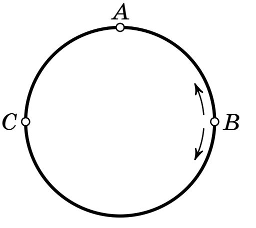
Решение. Всюду далее будем без ограничения общности считать, что все велосипедисты едут по треку против часовой стрелки, причем первый из них — самый быстрый, а третий — самый медленный, а также рассматривать движение всех велосипедистов относительно второго из них (т. е. в системе отсчета, в которой второй велосипедист остается неподвижен).

Обозначим через A точку, в которой постоянно находится второй велосипедист. Тогда первый и третий велосипедисты движутся относительно этой точки против и по часовой стрелке соответственно. Они периодически встречаются друг с другом через равные промежутки времени, поскольку едут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Обозначим через B_1, B_2, B_3, ... последовательные точки их встреч с начала наблюдения за этими спортсменами (см. рисунок). Любые две соседние точки B_n и B_{n+1} (n — произвольное натуральное число) различны, так как первый велосипедист не сможет сделать полный круг против часовой стрелки, не встретившись при этом с третьим. Обозначим через β_n меньшую из двух дуг трека с концами B_n, B_{n+1}. Ее длина не превосходит 150 метров. Поскольку встречи происходят периодически со сдвигом в одном направлении, все дуги β_n равны между собой и объединение нескольких из них покрывает весь трек. Значит, найдется такая дуга β_m, содержащая точку A, что длина одной из дуг B_mA или AB_{m+1} не превосходит 75 метров. Таким образом, в какой-то момент встречи первого и третьего велосипедистов они будут находиться от второго велосипедиста не дальше 75 метров. Поэтому фото-



граф заведомо сможет сделать удачный снимок, если d не больше 75 метров.

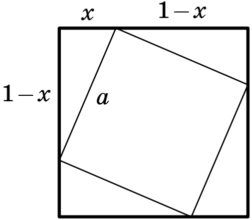
Приведем пример движения велосипедистов, при котором ни в какой момент времени они не могут оказаться на каком-либо участке трека длиной меньше 75 метров. Пусть скорости велосипедистов образуют арифметическую прогрессию, а в момент какой-то из встреч первого и третьего из них второй был впереди на 75 метров. Тогда относительно точки A, где постоянно находится второй велосипедист, первый и третий движутся с равными по величине, но различными по направлению скоростями. Следовательно, они будут встречаться поочередно в точках B и C, отстоящих от точки A на 75 метров, а их положения в каждый момент времени будут симметричны относительно прямой BC (см. рисунок). Значит, в каждый момент времени расстояние от одного из них до точки A будет не меньше 75 метров.



5. *Ответ.* $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

Решение. Пусть длина ребра меньшего куба равна $a < 1$. Раскрасим его вершины в черный и белый цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были окрашены в разные цвета. Тогда расстояние между любыми двумя точками одного цвета равно $a\sqrt{2}$. Назовем две черные и две белые вершины, принадлежащие одной грани меньшего куба, соответствующими. Рассмотрим 4 белые вершины. Куб имеет 3 пары противоположных граней, следовательно, по принципу Дирихле какие-то две белые вершины принадлежат одной паре противоположных граней большего (единичного) куба. Возможны два случая.

Случай 1. Две белые вершины оказались в одной грани единичного куба. Тогда две соответствующие им черные вершины принадлежат той же грани единичного куба (иначе одна из черных вершин лежала бы вне большего куба). Более того, эти 4 точки обязаны лежать на ребрах большего куба, так как иначе вершины противоположной грани меньшего куба лежали бы строго внутри единичного куба, что противоречит условию задачи. Получаем квадрат со стороной a, вписанный в единичный квадрат (см. рисунок). Пусть вершины меньшего квадрата разбивают стороны большего на отрезки длин x и $1-x$. Тогда



$$a^2 = x^2 + (1-x)^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+1-x)^2 = \frac{1}{2},$$

поэтому $a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Когда x пробегает полуинтервал $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, искомая длина a принимает все значения из полуинтервала $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$. При этом все вершины получающегося малого куба будут лежать на гранях единичного куба.

Случай 2. Две белые вершины оказались на разных противоположных гранях единичного куба. Тогда расстояние между ними, равное $a\sqrt{2}$, не меньше 1. Поэтому и в этом случае $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a < 1$.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.