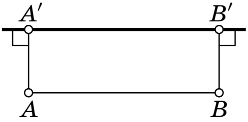
1. *Ответ.* $16^5 = 32^4$.

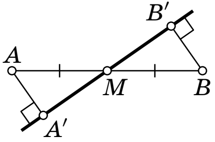
Решение. Это равенство верно, так как $(2^4)^5 = 2^{20} = (2^5)^4$.

Комментарий. Нетрудно доказать, что других решений нет (не считая перестановки правой и левой частей равенства).

2. *Решение.* Сначала исследуем, в каких случаях прямая равноудалена от двух точек.

Лемма. Пусть прямая ℓ равноудалена от A и B, тогда либо она параллельна AB, либо проходит через середину отрезка AB.



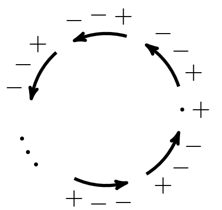


Доказательство. Точки A и B либо находятся по одну сторону от ℓ, либо по разные. Обозначим через A' и B' проекции A и B на ℓ соответственно. Если A и B лежат по одну сторону от ℓ, то $AA'B'B$ — прямоугольник, и $AB \parallel \ell$. Если A и B лежат по разные стороны от ℓ, то отрезок AB и прямая ℓ пересекаются в некоторой точке M. Тогда треугольники $AA'M$ и $BB'M$ равны как прямоугольные с равными катетами AA' и BB' и равными углами при вершине M. Поэтому $AM = MB$. Случаи, в которых ℓ проходит через A и B или $A' = B'$, разбираются аналогично. Лемма доказана.

Теперь решим задачу. Предположим противное: пусть никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Рассмотрим произвольную сторону треугольника и прямые, равноудаленные от ее концов: не более одной прямой паралельно стороне, и не более двух прямых проходят через середину стороны. Всего для трех сторон получаем не более девяти прямых. Противоречие.

3. *Ответ.* 34.

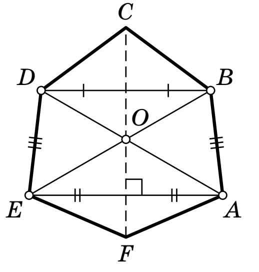
Решение. Приведем пример для 34 положительных чисел. Возьмем все числа равными 1 по модулю, а знаки расставим следующим образом:



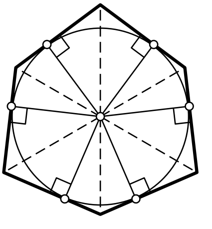
(сначала $+$, потом 33 группы $+--$, считая против часовой стрелки). Тут всего одна пара соседних положительных чисел и 33 пары соседних отрицательных — они и дадут 34 положительных произведения; остальные произведения будут отрицательными.

Докажем, что положительных чисел было не менее 34. Предположим, что их не более 33. Отрицательные числа в произведении могут образовываться, только если один из сомножителей положительный, причем каждое положительное число может участвовать не более чем в двух таких произведениях. Следовательно, отрицательных чисел не более 66. Но тогда всего чисел не более 99, противоречие.

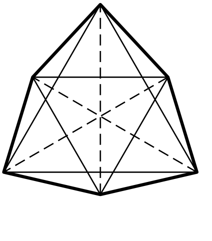
4. *Решение.* Обозначим через O точку пересечения диагоналей AD и BE (см. рисунок сверху). Из равенства треугольников ABD и EDB (они равны по трем сторонам) получаем, что расстояния от точек A и E до прямой BD равны, т. е. $AE \parallel BD$ и $ABDE$ является равнобокой трапецией.



Проведем серединный перпендикуляр ℓ к отрезку AE. Поскольку $ABDE$ — равнобокая трапеция, прямая ℓ является серединным перпендикуляром и к отрезку BD, а также проходит через точку O. Из равнобедренности треугольников BCD и AFE следует, что прямая ℓ проходит через точки C и F, т. е. диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, причем диагональ CF является биссектрисой углов C и F. Аналогично доказывается, что диагонали AD, BE являются биссектрисами углов A и D, B и E соответственно. Поскольку биссектрисы всех углов шестиугольника пересеклись в одной точке, то расстояния от точки O до сторон равны, т. е. существует вписанная в шестиугольник окружность (см. рисунок в центре).



Комментарий. Шестиугольник из условия задачи не обязательно правильный. Рассмотрим два правильных треугольника с общим центром и попарно параллельными сторонами, расположенными как на рисунке снизу.



Последовательно соединим их вершины. Полученный шестиугольник будет удовлетворять условию задачи. Несложно показать, что таким образом можно получить все подходящие под условие шестиугольники.

5. *Решение.* Оценку «a баллов из n возможных» будем обозначать кратко a/n или $\frac{a}{n}$. Оценки $0/n$ и n/n будем называть *крайними*.

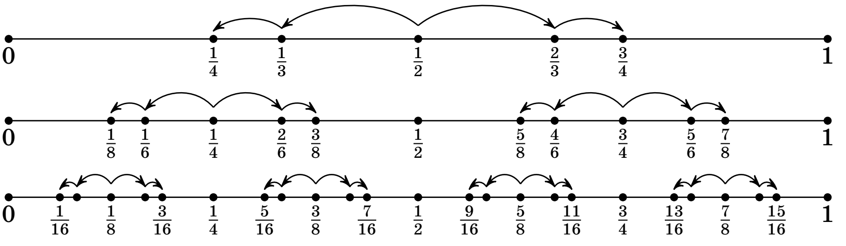
Лемма 1. Если последовательно менять шкалы в порядке $100 \to 99 \to 98 \to 97 \to \ldots \to 3 \to 2$, то любая некрайняя оценка $a/100$ превратится в $1/2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при этих заменах шкал некрайние оценки остаются некрайними, так как при всех $k > 1$ оценка $1/k$ ближе к любой некрайней оценке вида $a/(k+1)$, чем $0/k$; значит, на очередном шаге после округления оценка $0/k$ не могла получиться (аналогично с k/k). Таким образом, в конце останется некоторая некрайняя оценка в двухбалльной шкале, т. е. $1/2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Дано натуральное число k. Если менять шкалы в порядке

$$2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8 \to \ldots \to 2 \cdot 2^s \to 3 \cdot 2^s \to 2 \cdot 2^{s+1} \to \ldots \to 2^k,$$

то можно получить из исходной оценки $1/2$ любую оценку вида $(2r+1)/2^k$, где $0 \leqslant r < 2^{k-1}$.



Первые шесть шагов алгоритма из леммы 2 в решении задачи 5. Каждая следующая пара шагов содержит две «копии» предыдущей пары, сжатые в два раза.

Доказательство. Будем вести индукцию по k.

База: $k = 1$. Никаких операций не произошло, начальное состояние $1/2$.

Переход: предположим, что утверждение леммы верно для параметра $k-1$; докажем его для параметра k. Наша цель — получить оценку $(2r+1)/2^k$. Рассмотрим случай, когда r нечетно. По предположению индукции за первые $2(k-2)$ замен шкал можно получить оценку $r/2^{k-1}$. Выясним, что произойдет при переходе в следующую шкалу ($2^{k-1} \to 3 \cdot 2^{k-2}$):

$$3 \cdot 2^{k-2} = 3/2 \cdot 2^{k-1}; \quad r \to \frac{3r}{2}.$$

Это полуцелое число округлим до $(3r+1)/2$. При переводе в финальную шкалу ($3\cdot 2^{k-2}\to 2^k$) оценка $(3r+1)/2$ перейдет в

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{3r+1}{2}=2r+\frac{2}{3},$$

что округляется до $2r+1$. Случай четного r разбирается аналогично, при этом возникает следующая последовательность оценок:

$$(r+1)/2^{k-1}\to\frac{3r+2}{2}\Big/3\cdot 2^{k-2}\to(2r+1)/2^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Всякая некрайняя оценка вида $a/100$ может быть получена из некоторой нечетной оценки по шкале от 0 до 256 в результате замены шкал $256\to 100$.

Доказательство. От противного: пусть некоторая оценка $a/100$ не получается таким действием. Тогда в интервале $\left(\frac{a}{100}-\frac{1}{200},\frac{a}{100}+\frac{1}{200}\right)$ нет дробей вида $\frac{2r+1}{256}$. Но длина этого интервала равна $\frac{1}{100}$, а расстояние между соседними дробями такого вида равно $\frac{1}{128}$, что меньше. Противоречие, лемма доказана.

Теперь решим задачу. В начале будем действовать по алгоритму из леммы 1 и приведем обе оценки к состоянию $1/2$. Затем, действуя согласно лемме 2, можно получить из двух экземпляров $1/2$ любую пару нечетных оценок по шкале от 0 до 256. Лемма 3 гарантирует нам, что при возврате в исходную шкалу от 0 до 100 можно получить любую пару оценок.

Комментарий. По сути, доказано, что с помощью замен шкал можно из любых исходных данных получить любые результаты любого числа участников.

6. *Решение.* Рассмотрим $n=62$. Раскрасим числа от 1 до 62 в белый и черный цвета следующим образом: числа $1, 2, \ldots, 8$ — в черный цвет; $9, 10, 11, \ldots, 18$ — в белый; $19, 20, \ldots, 26$ — снова в черный, и так далее, чередуя черные блоки из восьми и белые блоки из десяти последовательных чисел. Черных чисел получится 32, а белых — 30.

Предположим, что $n=62$ пропрыгиваемо. Тогда кузнечику придется хотя бы 31 раз приземлиться на черную клетку. Но на черную клетку можно попасть только с белой.

Белых клеток всего 30, поэтому с разных клеток перепрыгивать на черные не получится. Противоречие.

Комментарий. Нетрудно привести алгоритм, который пропрыгивает все числа вида $17k+19m+\varepsilon$, где $\varepsilon=0, 1, -1$. В частности, числа 51, 52, ..., 58 пропрыгиваемы; кроме этого, начиная с 118, все натуральные числа представляются в таком виде, и, следовательно, пропрыгиваемы. Разумеется, отсюда не следует, что остальные числа непропрыгиваемы.