LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 10 класс

Задача 1. Квадратный трехчлен x^2+bx+c имеет два действительных корня. Каждый из трех его коэффициентов (включая коэффициент при x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трехчлена также увеличились на 1?

Задача 2. Все натуральные числа, бóльшие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

Задача 3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B.

Задача 4. У Васи есть камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой?

Задача 5. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

Задача 6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?
