LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 8 класс

Задача 1. Замените в выражении $AB^C = DE^F$ буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: AB^C — двузначное число из цифр A и B, возведенное в степень C. Достаточно привести один способ замены.)

Задача 2. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

Задача 3. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

Задача 4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон).

Задача 5. Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчета в шкалу 40 перейдет в $37 \cdot (40/100) = 14{,}8$ и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки a и b, отличные от 0 и 100. Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчетов так, чтобы у Пети стала оценка b, а у Васи — оценка a (пересчитываются одновременно обе оценки).

Задача 6. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (*Прыжок на k клеток* означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k-1$ клеток.) Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым,* если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

XV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`