Московская олимпиада школьников по робототехнике (2017)

Дистанционный этап

<u>7–8 классы</u>

1. Робот-разведчик получил задание проникнуть в секретный бункер. Добравшись до входа в бункер, робот обнаружил, что дверь заперта и для ее открытия требуется ввести трехзначный код, зашифрованный как сумма двух трехзначных чисел и представленный в виде картинки (рис.1), которую робот распознал при помощи системы технического зрения. Однако, одна цифра не была распознана корректно.

За какое число попыток робот сможет гарантированно вскрыть бункер, считая, что различные цифры достоверно шифруются различными фигурами? Приведите все возможные варианты кода. Объясните ответ. **(10 баллов)**

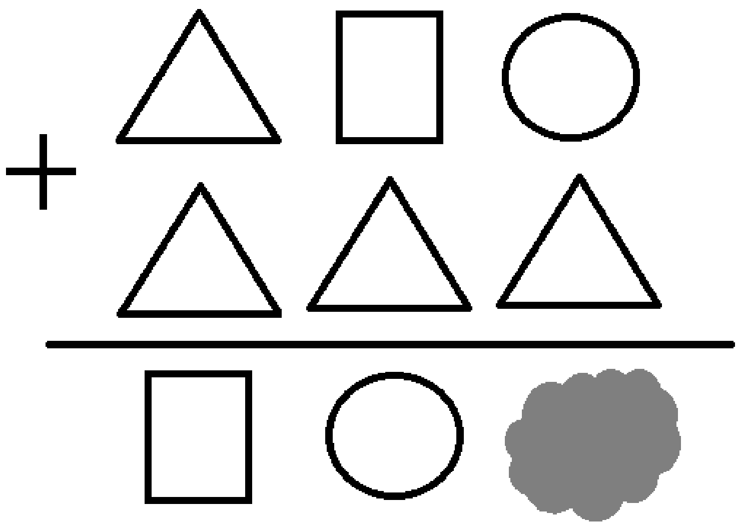


Рис.1

Ответ: 4 – 234, 468, 703, 937

Решение:

Для удобства записи решения введем следующие обозначения:

Треугольник обозначим за A

Прямоугольник обозначим за B

Круг обозначим за C

Нераспознанную цифру обозначим за X.

Тогда наш пример примет вид:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ +\mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{X} \end{array}$$

При этом X может быть любой цифрой.

Выразим B и C через A.

Если нет перехода через десяток C+A=X, то есть если C+A<=9

Тогда B+A=C, при условии, что нет перехода через 10, есть A+B<=9

Тогда A+A=B, то есть B=2A.

Тогда C=B+A=2A+A=3A, это все при условии, что

$$\begin{cases} A + B \leq 9 \\ C + \mathrm{A} \leq 9 \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} 2\mathrm{A} + \mathrm{A} \leq 9 \\ 3\mathrm{A} + \mathrm{A} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mathrm{A} \leq 9 \\ 4\mathrm{A} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} \leq 3 \\ \mathrm{A} \leq 2\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A} \leq 2\frac{1}{4}$

Так как A – цифра, то A может быть 0, 1 или 2.

Если A=0, то B=0 и C=0, а по условию A≠B≠C, значит решение A=0 не подходит.

При A=1, B=2, C=3, имеем решение: 123+111=234

При A=2, B=4, C=6, имеем решение: 246+222=468

Если же B+A=C+10, то есть переход через десяток, то A+B> 9

Тогда A+A+1=B, то есть B=2A+1

Тогда C=A+B-10=2A+1+A-10=3A-9

Определим, в каких границах выбирать A:

$$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} > 9 \\ \mathrm{A} + \mathrm{C} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + 2\mathrm{A} + 1 > 9 \\ \mathrm{A} + 3\mathrm{A} - 9 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mathrm{A} \geq 8 \\ 4\mathrm{A} \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} \geq 2\frac{2}{3} \\ \mathrm{A} \leq 4{,}5 \end{cases}$$

При A=3. Тогда B=2*3+1=7, C=3*3-9=0. Имеем решение 370 + 333=703

При A=4, B=2*4+1=9, C=3*4-9=3. Имеем решение 493+444=937.

Если же есть переход через десяток при сложении C и A, то есть C+A= 10 +X, то есть C+A>9.

Тогда A+B+1=C, при условии, что A+B+1≤9

Тогда A+A=B, то есть B=2A, C=A+2A+1=3A+1

Определим, в каких границах следует выбрать A:

$$\begin{cases} C + A > 9 \\ A + B + 1 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 1 + A > 9 \\ A + 2A + 1 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A > 8 \\ 3A \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A > 2 \\ A \le 2\frac{2}{3} \end{cases}$$

При натуральных А данная система не имеет решения. Значит, данная конфигурация не выполняется.

Если же есть переход через десяток при сложении С и А, то есть С+А= 10 +Х, то есть С+А>9.

Данное неравенство можно дополнить неравенством для Х: Х=С+А-10≤9

Если же А+В+1=10+С, то есть происходит переход через десяток, то А+В+1>9.

Тогда А+А+1=В, то есть В=2А+1, С=А+В+1-10=А+2А+1-9=3А-8

Определим, в каких границах следует выбрать А:

$$\begin{cases} C + A - 10 \le 9 \\ A + B + 1 > 9 \\ C + A > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A - 8 + A - 10 \le 9 \\ A + 2A + 1 + 1 > 9 \\ 3A - 8 + A > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A \le 27 \\ 3A > 7 \\ 4A > 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \le 6\frac{3}{4} \\ A > 2\frac{1}{3} \\ A > 4\frac{1}{4} \end{cases}$$

То есть следует проверить А, равное 5, 6.

При А=5, В=2*5+1=11, С=7. 11 не является цифрой.

При А=6, В=2*6+1=13, С=10. 13 и 10 не являются цифрами.

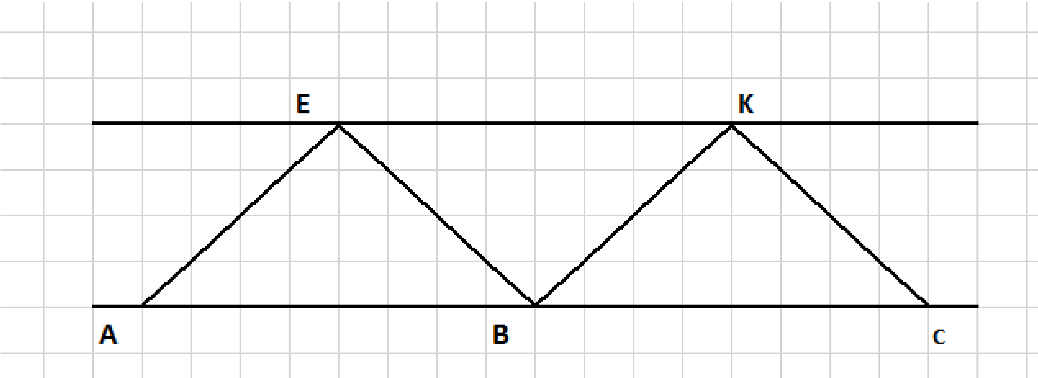
Таким образом, мы получили 4 варианта решения: **234, 468, 703, 937.**

2. Автоматизированная система слежения за движущимися объектами состоит из двух ультразвуковых датчиков, расположенных на расстоянии 10м друг от друга, с углом обзора 90 °каждый, направленных в одну сторону так, чтобы внутренние границы обзора пересекались также под углом 90 °. Система слежения зафиксировала, что объект двигался по прямой, пересекая линии границ обзора в точках A, B и C, где A – лежит на линии внешней границы обзора первого датчика, B – воображаемая точка пересечения линий внутренних границ обзора первого и второго датчика, C – линия внешней границы обзора второго датчика. Определите длину движущегося объекта, если от времени фиксации объекта в точке A до времени фиксации объекта в точке B прошло 10 с, AB= 10 м, а определение движущегося объекта в точке C окончилось по истечении 18 с, после момента начала его фиксации в точке B. **(10 баллов)**

Ответ: 1 м

Решение:

Сделаем чертеж к задаче:



Известно, что ∠E= ∠B= ∠K=90°.
Значит, треугольники AEB, BEK и BKC – прямоугольные.
Рассмотрим треугольники AEB и BKE: EK=AB=10 м, BE – общий катет для треугольников AEB и BEK. Следовательно, эти два прямоугольных треугольника равны (по катету и гипотенузе).
Из равенства треугольников AEB и BKE следует, что ∠ABE=∠BEK. Но углы ABE и BEK – накрест лежащие при прямых EK и AC и секущей BE. Значит, прямые EK и AB – параллельны.
Так как точки A, B и C лежат на одной прямой, то BC|| EK. Значит, ∠EKB=∠KBC.
Рассмотрим прямоугольные треугольники EKB и BCK: BK – общий катет, ∠EKB=∠KBC. Значит, прямоугольные треугольники EKB и BCK равны (по катету и острому углу).
Треугольник AEB равен треугольнику BKE, а треугольник BKE равен треугольнику BCK. Значит, треугольники AEB и BCK – равны. Значит, BC=KE=10м.
Предположим, что объект движется равномерно и прямолинейно.
Так как от времени фиксации объекта в точке A до времени фиксации объекта в точке B прошло 10 секунд, то скорость движения объекта равна 10 м : 10 с = 1 м/с.
Так как определение движущегося объекта в точке C окончилось по истечении 11 секунд после момента начала его фиксации в точке B, то можно утверждать, что от начала фиксации начала объекта на пункте B до окончания фиксации его «хвоста» на пункте C прошло 11 секунд.
Так как AB=BC, а скорость движения объекта постоянна, то время, за которое начало объекта достигнет пункта C, равно 10 с. Получается, что прохождение объектом точки C заняло 11 с – 10 с = 1 с.
Зная, что скорость движения объекта равна 1 м/с, определим длину объекта: 1 с× 1 м/с = 1 м.
Ответ: длина объекта равна 1 м.

Задача 3.

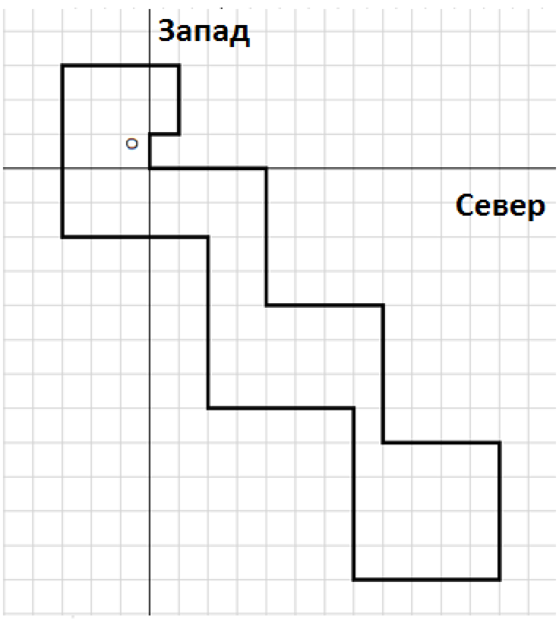
3. Робот выполнил программу:

Повторить 3 раза:
А клеток на север;
4 клетки на восток;
Конец повторить;
Повторить 3 раза:
В клеток на юг;
В клеток на запад;
Конец повторить;
4 клетки на север;
2 клетки на восток;
1 клетка на юг;
1 клетка на восток
Конец

Траектория движения робота представляет собой замкнутую, самопересекающуюся кривую.
Изобразите траекторию движения робота.

Выберите оси так, чтобы вдоль оси OX изображалось движение на север, а вдоль оси OY – движение на запад. В качестве точки начала движения выберите начало координат. **(15 баллов)**

Ответ:



Решение:

Раз траектория движения робота представляет собой замкнутую кривую, то точки начала и конца движения совпадают.

После окончания циклов робот, чтобы вернуться на место старта, должен преодолеть 4-1клетки на север и 2+1 клетки на восток, то есть на 3 клетки на север и 3 клетки на восток.

Это означает, что после выполнения циклов робот смещается на 3A-3B клеток на юг, то есть

$$3 \times B - 3 \times A = 3$$
$$B - A = 1$$
$$A = B - 1$$

А так как после выполнения циклов робот смещается на 3×4-3B клеток на запад, то

$$3B - 12 = 3$$
$$3B = 15$$
$$B = 5$$

Тогда $A = 5 - 1 = 4$

То есть, робот выполнил программу:

Повторить 3 раза:

4 клетки на север;

4 клетки на восток;

Конец повторить;

Повторить 3 раза:

5 клеток на юг;

5 клеток на запад;

Конец повторить;

4 клетки на север;

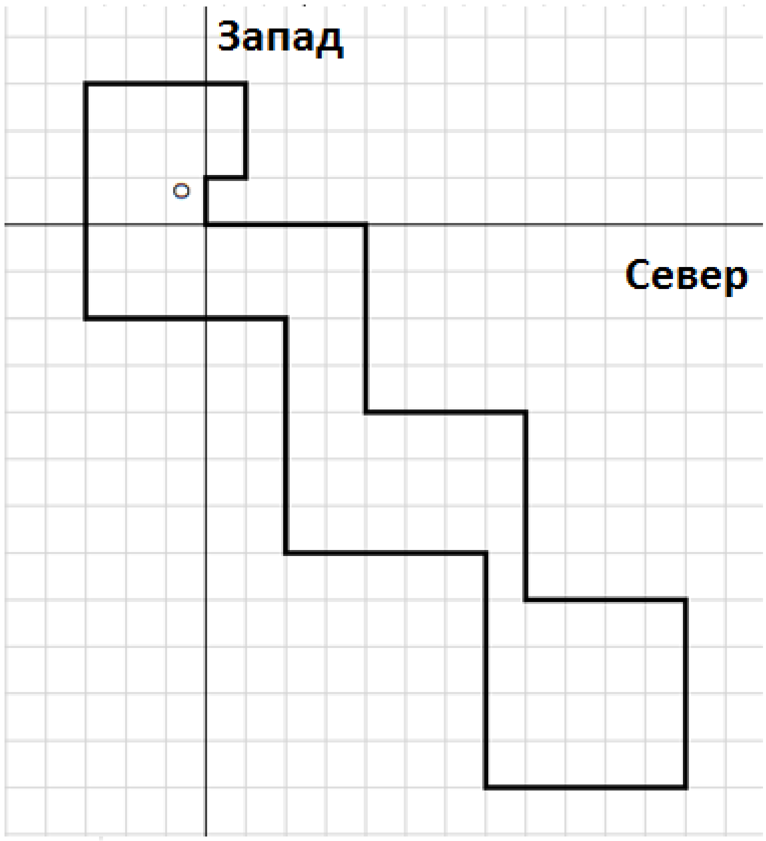
2 клетки на восток;

1 клетка на юг;

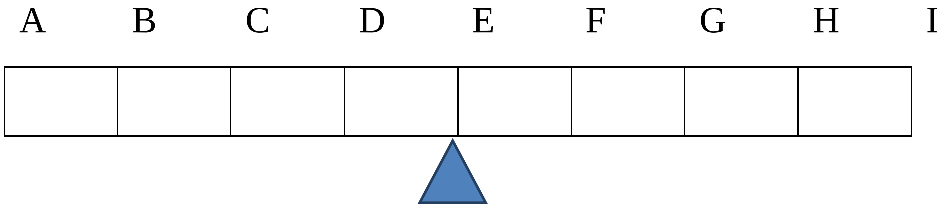
1 клетка на восток

Конец

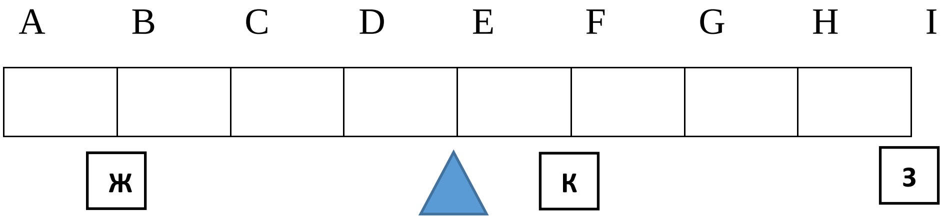
Изобразим траекторию движения робота:


Запад
Север

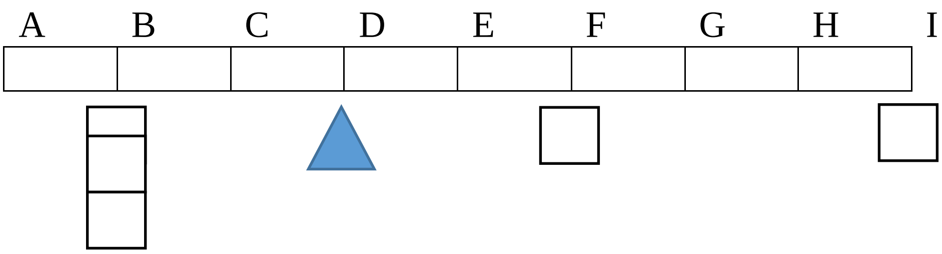
4. **Задача 4.** Есть длинная невесомая балка, разделенная штрихами на 8 равных частей. Концы балки и штрихи последовательно обозначены слева на право буквами латинского алфавита от A до I. Балка, установленная на опору в точке E, находится в равновесии.



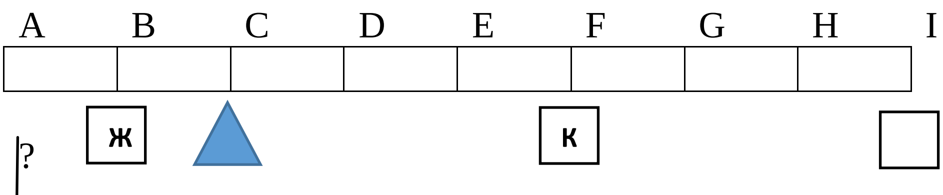
Есть кубики трех цветов – красный (К), желтый (Ж) и Синий(С). Массы кубиков разного цвета различны, массы кубиков одного цвета одинаковы. К балке прикрепили желтый кубик в точке B, красный в точке F, а зеленый в точке I. При этом система осталась в равновесии.



Если переместить опору в точку D, при этом сохранив первоначальное положение кубиков, то для того, чтобы система пришла в равновесие в точке B нужно будет добавить один красный и один зеленый кубик.



Опору переместили в точку C, при этом сохранив первоначальное положение кубиков. Сколько красных кубиков нужно подвесить в точке A, чтобы система пришла в равновесие? **(15 баллов)**



Решение:

Выразим массы желтого и зеленого кубиков через массу красного кубика.

Обозначим для удобства массу Красного кубика за X, Желтого за Y, Зеленого за Z.

Применим к первому случаю условие равновесие рычага, получим:

$3Y = 1X + 4Z$ (1)

Применим ко второму случаю условие равновесия рычага:

$2(X+Y+Z) = 2X+5Z$

Раскроем скобки:

$2X+2Y+2Z = 2X+5Z$

Приведем подобные слагаемые:

$2Y = 3Z$

Получим, что $Y=1,5\ Z$

Подставим получившееся соотношение для Y через Z в первое уравнение (1):

$3*\ 1,5\ Z = X+4Z$

Получим:

$4,5\ Z = X + 4Z$

$X = 0,5\ Z$ или $Z = 2X$

Тогда $Y = 1,5*2X = 3X$, то есть желтый кубик в три раза тяжелее красного, а зеленый – в два раза тяжелее красного.

Применим к третьему случаю условие равновесия рычага, обозначив количество красных кубиков в точке А в качестве параметра N:

$2NX + 1Y = 3X + 6Z$

Подставив найденные ранее соотношения для Y и Z через X, получим:

$2NX+3X = 3X+ 6*2X$, то есть $2NX = 12\ X$

Разделив обе части уравнения на 2X, получим: $N=6$

Ответ: Для приведения системы в равновесие нужно в точке А подвесить 6 красных кубиков.