1. *Ответ.* Ни одного.

Первое решение. Прямая, являющаяся графиком производной $y = 2ax + b$ квадратного трёхчлена, касается параболы $y = ax^2 + bx + c$: если они не пересекаются, то разбивают координатную плоскость на три части, а если пересекаются в двух точках, то разбивают плоскость на пять частей.

Из условия касания графиков получаем, что дискриминант уравнения

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

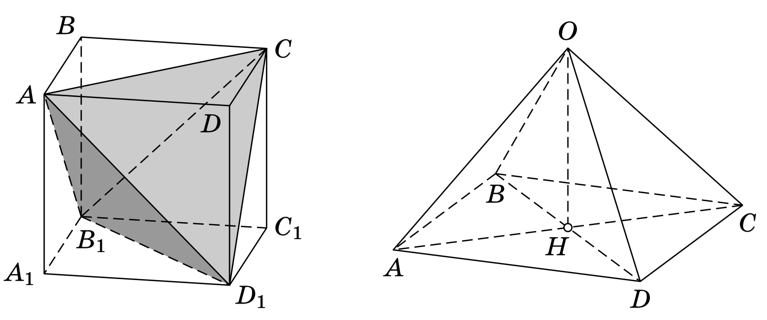
равен нулю, т. е. $(b - 2a)^2 - 4a(c - b) = b^2 + 4a^2 - 4ac = 0$, откуда дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен

$$D = b^2 - 4ac = -4a^2 < 0,$$

поэтому трёхчлен не имеет корней.

Второе решение. Так же, как и в предыдущем способе, устанавливаем факт касания графиков трёхчлена и его производной. Заметим, что производная пересекает ось абсцисс (меняет знак) в точке, абсцисса которой равна абсциссе вершины параболы. Следовательно, если ветви параболы направлены вверх, то вершина параболы лежит выше оси абсцисс, а если вниз, то ниже оси абсцисс. В обоих случаях квадратный трёхчлен корней не имеет.

2. *Решение.* Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды (см. рисунок слева). Достаточно заметить, что тетраэдр ACB_1D_1 — правильный с ребром $\sqrt{2}a$,



а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a=1/\sqrt{2}$.

Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной O провести высоту OH и разрезать пирамиду плоскостями OHA и OHB на 4 одинаковые части (см. рисунок справа). Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $1/\sqrt{2}$.

3. *Ответ.* а) Да; б) нет.

Решение. а) Для многочлена $P(x)=x^2-x$ имеем

$$P(x)P(x+1) = (x^2-x)((x+1)^2-x-1) = \\ = x^2(x+1)(x-1) = x^4-x^2 = P(x^2).$$

б) *Первое решение.* Из условия следует, что многочлен $P(x)$ раскладывается на линейные множители. Пусть

$$P(x) = a(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Тогда корнями многочлена $P(x)P(x+1)$ являются числа $x_1, \ldots, x_n, x_1-1, \ldots, x_n-1$. При этом многочлен

$$P(x^2+1) = a(x^2+1-x_1)\ldots(x^2+1-x_n)$$

также должен раскладываться на линейные множители, поэтому $x_k \geqslant 1$, $k=1, \ldots, n$. Множество его корней $\pm\sqrt{x_k-1}$, $k=1, \ldots, n$, должно совпадать с множеством корней многочлена $P(x)P(x+1)$. Пусть x_m — наибольшее из чисел x_k, $k=1, \ldots, n$, т. е. наибольший из корней многочлена $P(x)P(x+1)$. Тогда число $\sqrt{x_m-1}$ является наибольшим из корней многочлена $P(x^2)$. Но $\sqrt{x_m-1}<x_m$, так как $x_m^2-x_m+1>0$. Следовательно, совпадение множеств корней многочленов $P(x)P(x+1)$ и $P(x^2)$ невозможно.

Второе решение. Если такой многочлен $P(x)$ существует, то он имеет хотя бы один действительный корень. Пусть x_0 — наибольший из его корней. Тогда из условия получаем, что $P(x_0^2+1)=P(x_0)P(x_0+1)=0$, т. е. число x_0^2+1 также является корнем многочлена $P(x)$. Но $x_0^2+1>x_0$, что противоречит максимальности корня x_0. Следовательно, такого многочлена не существует.

Комментарий. Пользуясь методами решения п. б), можно показать, что множеством корней многочлена $P(x)$, удовлетворяющего при всех действительных x равенству из п. а), может быть только множество $\{0, 1\}$. Таким образом, приведённый в решении п. а) пример — единственный возможный.

4. *Ответ.* Нельзя.

Первое решение. Предположим противное: $11^{2018} = m_1^3 + n_1^3$, $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Если оба числа m_1 и n_1 делятся на 11, то разделим это равенство на куб максимальной степени 11, которая делит одновременно и m_1, и n_1, пусть это 11^s. Тогда получим $11^{2018-3s} = m^3 + n^3$, где $3s < 2018$ и хотя бы одно из чисел $m = m_1/11^s$ и $n = n_1/11^s$ не делится на 11. Значит, оба этих числа не делятся на 11, так как иначе сумма $m^3 + n^3$ не делилась бы на 11.

Поскольку $m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2)$ и число 11 простое, получаем $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где $k, l \geqslant 0$ и $k + l = 2018 - 3s$. Поэтому

$$3mn = (m+n)^2 - (m^2 - mn + n^2) = 11^{2k} - 11^l.$$

Из равенства $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn$ следует, что $11^l > 1$, откуда $l > 0$. Значит, mn делится на 11, а поэтому одно из чисел m или n делится на 11. Противоречие.

Это решение можно окончить иначе. Если $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где $k, l > 0$, то числа m и $-n$ дают одинаковые ненулевые остатки при делении на 11: $m \equiv -n \not\equiv 0 \pmod{11}$, но тогда $m^2 - mn + n^2 \equiv 3m^2 \not\equiv 0 \pmod{11}$, и снова получаем противоречие.

Второе решение. Пусть, от противного,

$$11^{2018} = m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2).$$

Тогда $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где k, l — целые неотрицательные. Поскольку

$$\frac{(m+n)^2}{4} < m^2 - mn + n^2 < (m+n)^2$$

для всех натуральных m и n, то

$$11^{2k-1} < \frac{11^{2k}}{4} < 11^l < 11^{2k},$$

откуда $2k - 1 < l < 2k$, что невозможно для целых чисел.

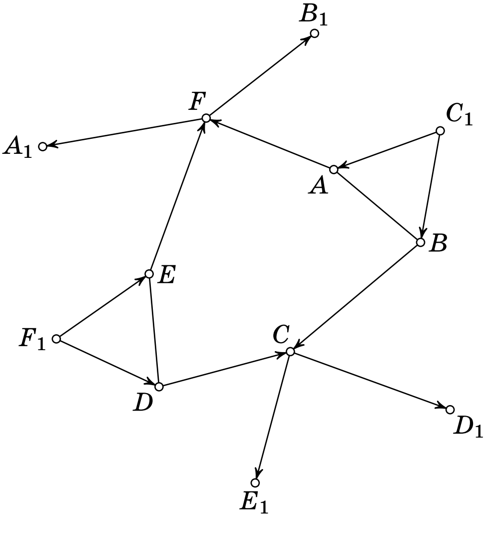
Третье решение. С одной стороны, поскольку $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$ и $2018 \equiv 2 \pmod 6$, имеем

$$11^{2018} \equiv 2^{2018} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 9,$$

то есть число 11^{2018} даёт остаток 4 при делении на 9. С другой стороны, кубы натуральных чисел дают только остатки 0, 1 и 8 при делении на 9, так как $(9k + 3l + a)^3 \equiv a^3 \pmod 9$ при $a = 0$, 1, 2 и k, $l \in \mathbb{N}$. Значит, сумма кубов двух натуральных чисел может дать лишь остатки 0, 1, 2, 7 или 8 при делении на 9, но не может дать 4.

Комментарий. Справедлив более общий факт: для любого простого числа $p \geqslant 5$ и любого натурального n число p^n нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел. Это можно доказать теми же методами, что использованы в первом и втором способах решения. Отметим, что при $p = 2$ и $p = 3$ соответствующее утверждение неверно, так как $2^1 = 1^3 + 1^3$ и $3^2 = 1^3 + 2^3$.

5. *Решение*. По условию треугольники $B_1D_1F_1$ и DEF_1 являются правильными. Значит, при повороте на 60° против часовой стрелки векторы $\overrightarrow{F_1D_1}$ и $\overrightarrow{F_1D}$ перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{F_1B_1}$ и $\overrightarrow{F_1E}$ соответственно (см. рисунок). Имеем $\overrightarrow{F_1D_1} = \overrightarrow{F_1D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{F_1B_1} = \overrightarrow{F_1E} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB_1}$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{F_1D_1} - \overrightarrow{F_1D} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD_1}$ при таком повороте перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{F_1B_1} - \overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB_1}$.



Также по условию треугольники BCD_1, CDE_1, EFA_1 и FAB_1 являются правильными. Значит, при повороте на 120° против часовой стрелки векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE_1}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FB_1}$ перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FA_1}$ и $\overrightarrow{AF}$ соответственно. Отсюда получаем, что векторы $\overrightarrow{BE_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE_1}$ и $\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB_1}$ при таком повороте перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA_1}$ соответственно. Следовательно, при повороте на 300° против часовой стрелки или, что то же, при повороте на 60° по часовой стрелке, вектор $\overrightarrow{BE_1}$ перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{AA_1}$.

Наконец, по условию треугольник ABC_1 является правильным. Значит, при повороте на 60° по часовой стрелке вектор $\overrightarrow{C_1B}$ перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{C_1A}$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{C_1E_1}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BE_1}$ при таком повороте перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AA_1}$. Следовательно, треугольник $A_1C_1E_1$ также является правильным.

Комментарий. См. также решение задачи 6 для 8 класса.

6. *Ответ.* б) Да, может.

Решение. а) Занумеруем все комнаты наборами длины n из нулей и единиц (числами от 0 до 2^n-1 в двоичной системе). Обозначим через A_k и B_k множества наборов, у которых на k-м месте стоит соответственно 1 или 0. Для каждого $k=1, \ldots, n$ множества A_k и B_k не пересекаются и вместе составляют всё множество наборов.

Рассмотрим следующий алгоритм посылок: в $(2k-1)$-й раз прораб посылает людей в комнаты с номерами из множества A_k, в $(2k)$-й раз он посылает людей в комнаты с номерами из множества B_k, k меняется от 1 до n. Всего получается $2n$ посылок.

Пусть лампочка в комнате с номером i включается выключателем в комнате с номером $f(i)$. Если $i \in A_k$ и во время $(2k-1)$-й посылки лампочка в i-й комнате включилась, то $f(i) \in A_k$, а если не включилась, то $f(i) \in B_k$. Аналогично, если $i \in B_k$ и во время $(2k)$-й посылки лампочка в i-й комнате включилась, то $f(i) \in B_k$, а если не включилась, то $f(i) \in A_k$. Таким образом, за $(2k-1)$-ю и $(2k)$-ю посылки прораб точно устанавливает k-й разряд номера $f(i)$ для каждого i. Следовательно, после $2n$ указанных посылок он полностью установит соответствие f.

б) Покажем, что за $2n-1$ посылок прораб также может установить соответствие f.

Пусть первые $2n-2$ посылки те же, что в предыдущем пункте. После них прораб для каждого i знает номер $f(i)$ с точностью до последнего знака. Построим специальный граф, соответствующий этому знанию. Вершины графа располагаются в два горизонтальных ряда, каждый из которых соответствует парам $P_1, P_2, \ldots, P_{2^{n-1}}$ наборов (номеров комнат), различающихся только в последнем знаке (например, $P_1 = \{0\ldots0, 0\ldots01\}$). Рёбра графа проходят только от вершин верхнего ряда к вершинам нижнего ряда по следующему правилу: вершина в верхнем ряду, соответствующая паре P_s, соединена с вершиной в нижнем ряду, соответствующей паре P_t, в точности тогда, когда для некоторого $i \in P_s$ прорабу известно, что $f(i) \in P_t$.

В таком графе все вершины имеют степень 2. Следовательно, он разбивается на непересекающиеся циклы, в которых все вершины и рёбра проходятся ровно по одному разу. Зафиксируем для каждого из этих циклов обход, начинающийся в вершине верхнего ряда, и рассмотрим все нечётные ребра во всех этих обходах. Каждое из этих рёбер порождено соответствием $i \to f(i)$ в указанном выше смысле. Прораб отбирает множество A всех номеров i, соответствующих выбранным нечетным рёбрам, и в $(2n-1)$-й раз посылает людей в комнаты с этими номерами (их 2^{n-1} штук).

Покажем, что в результате он полностью установит соответствие f.

Пусть $i \in A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть ровно один номер m из пары P_j. Если во время $(2n-1)$-й посылки лампочка в i-й комнате загорелась (выключатель в m-й комнате включается), то $f(i) = m$, в противном случае $f(i)$ есть номер, дополнительный к m в паре P_j.

Пусть $i \notin A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть такой номер q, что $f(q)$ тоже лежит в P_j. Во время $(2n-1)$-й посылки, как уже было сказано, номер $f(q)$ устанавливается, и тогда $f(i)$ есть номер, дополнительный к $f(q)$ в паре P_j.

Комментарий. Авторам неизвестно минимальное количество посылок, необходимое для установления соответствия между комнатами и выключателями.