8 класс

1. *Ответ.* Да.

Например, $a=1$, $b=3$, $c=12$: $1+3+12=4^2$, $1\cdot 3\cdot 12=6^2$.

Комментарий. Существует и множество других таких троек. Например, если взять произвольную пифагорову тройку $u^2+v^2=w^2$, то подходят числа $a=u^4$, $b=v^2u^2$, $c=w^2v^2$.

2. *Ответ.* Знак положительный.

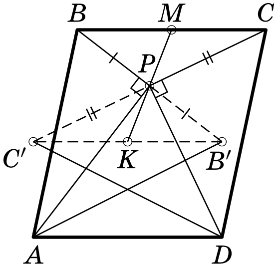
Решение. Докажем, что на нечетных местах стоят отрицательные числа, а на четных — положительные. Тогда произведение всех чисел будет отрицательным, поскольку перемножаем 20 отрицательное число и 19 положительных чисел.

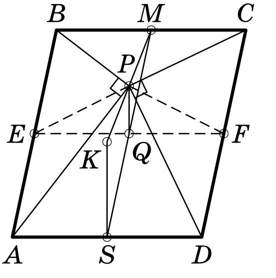
Пусть выписаны числа a_1, a_2, ..., a_{39}. Заметим, что если выкинуть произвольное число a_{2k+1} с нечетным номером, то остальные разбиваются на пары соседних:

$$\{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_{2k-1}, a_{2k}\}, \{a_{2k+2}, a_{2k+3}\}, \ldots, \{a_{38}, a_{39}\}.$$

Значит, сумма всех остальных чисел положительная, но с добавлением a_{2k+1} она становится отрицательной, т. е. $a_{2k+1}<0$. Поскольку $a_{2k}+a_{2k+1}>0$, то $a_{2k}>0$. Наше утверждение доказано.

3. *Первое решение*. Удвоим отрезки BP и CP за точку P, то есть отметим точки B' и C' такие, что P является серединой отрезков BB' и CC' (см. рис. слева). Ясно, что K — середина $B'C'$. Кроме того, $B'C' = BC$, а потому $AC'B'D$ — параллелограмм. Достаточно доказать, что $AC'B'D$ — прямоугольник, тогда утверждение задачи будет следовать из равенства прямоугольных треугольников $AC'K$ и $DB'K$.





Заметим, что в треугольнике ABB' отрезок AP является медианой и высотой. Это означает, что треугольник равнобедренный и $AB' = AB$. Аналогично, рассматривая треугольник DCC', получаем $DC' = DC$.

Но $AB = DC$, так как это противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $AB' = DC'$. Получается, что в параллелограмме $AC'B'D$ диагонали равны между собой. Тогда это прямоугольник, откуда следует искомое утверждение.

Второе решение. Отметим середины E и F отрезков AB и CD и середины Q и S отрезков EF и AD (см. рис. справа). Заметим, что $PE = AB/2$ и $PF = DC/2$ из свойства медиан, проведенных к гипотенузам в прямоугольных треугольниках APB и CPD. Но так как $AB = DC$, получаем, что $PE = PF$. Отсюда следует, что треугольник EPF равнобедренный, и его медиана PQ перпендикулярна EF, а значит, и AD.

С другой стороны, Q является серединой MS, так как средние линии параллелограмма делят его на четыре равные части. Получаем, что отрезок PQ — средняя линия треугольника MKS, параллельная стороне KS. Тогда KS тоже перпендикулярен AD. Это означает, что в треугольнике AKD совпала медиана и высота, то есть он равнобедренный, откуда и следует требуемое.

Установить, что $PQ \perp EF$, можно и другим образом: из данных в условии прямых углов следует, что точка P лежит на окружностях с диаметрами AB и CD. Центрами этих окружностей являются точки E и F, а их радиусы равны. Поэтому отрезок, соединяющий их точки пересечения (одна из которых и есть P), перпендикулярен отрезку EF и делит его пополам.

4. *Первое решение.* Обозначим через a_1, a_2, ..., a_{15} числа месяца, в которые были солнечные дни. Тогда Андрей Степанович за дни с 1-го числа по a_1-е не выпьет ни одной капли, за дни с a_1-го числа до a_2-го (a_1-е включительно, a_2-е не включительно) будет пить по одной капле и т. д. Итого он выпьет

$$1 \cdot (a_2 - a_1) + 2 \cdot (a_3 - a_2) + \ldots$$
$$\ldots + 14 \cdot (a_{15} - a_{14}) + 15 \cdot (30 - a_{15} + 1) =$$
$$= 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}).$$

Иван Петрович же выпьет количество капель, равное сумме номеров всех дней, кроме a_i:

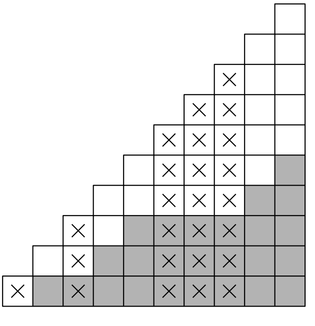
$$(1 + 2 + \ldots + 30) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}) =$$
$$= 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}).$$

Второе решение. Для начала рассмотрим ситуацию, когда первые пятнадцать дней апреля были пасмурными, а последние пятнадцать — солнечными. Легко проверить, что оба персонажа задачи выпьют по $1 + 2 + 3 + \ldots + 15 = 120$ капель валерьянки — действительно поровну.

Поменяем некоторый солнечный день s с некоторым пасмурным днем p местами и посмотрим, как изменятся месячные дозы валерьянки у обоих. Предположим, что $s > p$. Заметим, что Андрей Степанович в дни, начиная с p не включительно по s включительно будет пить на одну каплю валерьянки больше, чем до перемены дней местами, а во все остальные дни он будет пить столько же. Получается, что всего он выпьет на $s - p$ капель больше, чем до операции перемены дней. Что касается Ивана Петровича, то он после перемены дней также будет пить на $s - p$ капель больше, чем до перемены, так как он перестал пить валерьянку в день p и начал в день s. Аналогично можно доказать, что если $s < p$, то количество выпитой каждым из героев задачи валерьянки уменьшится на $p - s$.

Итак, операция перемены пасмурного и солнечного дня местами у обоих меняет дозу принятой валерьянки на одно и то же число капель. Остается заметить, что операциями перемены дней можно из исходного месяца (с 15 пасмурными днями в начале) получить любой другой.

Третье решение. Рассмотрим клетчатую «лестницу»: фигуру, состоящую из 30 столбцов, соответствующих дням в апреле, в каждом столбце которой клеток столько, каков номер этого дня в месяце (см. рисунок). В каждом столбце закрасим серым цветом клеток столько, сколько капель валерьянки выпил Андрей Степанович в соответствующий день, а каждый столбец, соответствующий пасмурному дню, заполним крестиками.



Таким образом, Андрей Степанович выпил валерьянки столько, сколько клеток закрашено, а Иван Петрович —

столько, сколько в таблице крестиков. Достаточно доказать, что крестиков в незакрашенных клетках столько же, сколько закрашенных клеток без крестиков.

Закрашенные клетки без крестиков стоят в «солнечных» столбцах. Каждый солнечный день Андрей Степанович выпивал на одну каплю валерьянки больше, чем в предыдущий солнечный день (в первый солнечный день он выпил 1 каплю). Получается, количество закрашенных клеток без крестиков равно $1 + 2 + 3 + \ldots + 15$.

Теперь посчитаем количество крестиков в незакрашенных клетках. Пусть n-й день был пасмурным и до этого было k солнечных дней. Тогда в соответствующем столбце будет стоять $n - k$ «незакрашенных» крестиков (и k «закрашенных»). Заметим, что это ровно $(n - k)$-й пасмурный день, то есть в первый пасмурный день незакрашенный крестик будет один, во второй — два и т. д. Таким образом, количество незакрашенных крестиков равно $1 + 2 + 3 + \ldots + 15$.

5. *Решение.* Во-первых, заметим, что выражение

$$(a \mathbin{?} a) \mathbin{!} (a \mathbin{?} a)$$

всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение.

Выражение

$$(x \mathbin{?} 0) \mathbin{?} (0 \mathbin{?} y)$$

всегда равно $x + y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию $+$ с двумя аргументами.

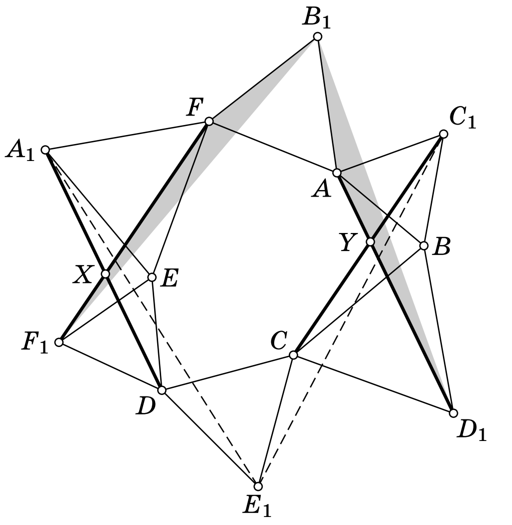
Наконец, выражение

$$0 \mathbin{?} ((0 \mathbin{!} (x \mathbin{!} 0)) \mathbin{?} 0)$$

всегда равно $-x$. Теперь легко выписать искомое выражение:

$$((\ldots(a \underbrace{+ a) + \ldots + a) +}_{19 \text{ знаков «+»}} a) + (-((\ldots(b \underbrace{+ b) + \ldots + b) +}_{17 \text{ знаков «+»}} b)).$$

6. *Первое решение.* Обозначим точку пересечения FF_1 и A_1D через X, а точку пересечения CC_1 и AD_1 — через Y (см. рисунок).



Лемма 1. Отрезки FF_1 и A_1D равны и $\angle A_1XF = 60^\circ$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники F_1EF и DEA_1. Они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = A_1D$. Далее

$$\begin{aligned}\angle A_1XF = 180^\circ - \angle XA_1F - \angle XFA_1 = \\ = 180^\circ - \angle XA_1E - \angle EA_1F - \angle XFA_1 = \\ = 180^\circ - \angle EA_1F - \angle EFA_1 = 60^\circ.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдём к решению задачи. Рассмотрим треугольники B_1FA и $B_1F_1D_1$. Это два правильных треугольника с общей вершиной, поэтому углы FB_1A и $F_1B_1D_1$ равны 60°. Вычтя у этих углов общую часть, получим равенство углов FB_1F_1 и AB_1D_1. Треугольники FB_1F_1 и AB_1D_1 равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = AD_1$ и $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1$.

Лемма 2. Углы A_1DE_1 и C_1CE_1 равны.

Доказательство. Обозначим $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1 = \alpha$. Тогда $\angle XFA = \alpha - 60^\circ$ и

$$\angle FAY = 360^\circ - \angle B_1AF - \angle B_1AD_1 = 300^\circ - \alpha,$$

откуда $\angle XFA + \angle FAY = 240^\circ$. По лемме 1 $\angle FXD = \angle AYC = 120^\circ$, поэтому, записав сумму углов шестиугольника

$AYCDXF$, получим, что сумма углов XDC и DCY равна 240°. Тогда

$$\angle E_1CC_1 = 360^\circ - \angle DCE_1 - \angle DCY = 300^\circ - (240^\circ - \angle XDC) = \\ = 60^\circ + \angle XDC = \angle CDE_1 + \angle XDC = \angle XDE_1 = \angle A_1DE_1.$$

Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Воспользовавшись леммой 1, получим

$$A_1D = FF_1 = AD_1 = CC_1.$$

Рассмотрим треугольники A_1DE_1 и C_1CE_1. Воспользовавшись предыдущим равенством и леммой 2, получим, что они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $A_1E_1 = E_1C_1$. Аналогично доказывается, что $A_1E_1 = A_1C_1$, откуда треугольник $A_1C_1E_1$ — равносторонний.

Замечание. Приведённое решение, вообще говоря, зависит от взаимного расположения точек. При другом расположении точек решение аналогично. Ниже написано решение, не зависящее от расположения точек. (См. также решение задачи 5 для 11 класса, 1-й день.)

Второе решение. Обозначим символом $\angle(X_1Y_1, X_2Y_2)$ угол, на который нужно повернуть отрезок X_1Y_1 против часовой стрелки так, чтобы он стал одного направления с отрезком X_2Y_2. Если поворот осуществлялся по часовой стрелке, то значение надо брать со знаком минус. В частности, $\angle(X_1Y_1, X_2Y_2) = -\angle(X_2Y_2, X_1Y_1)$.

Рассмотрим треугольники B_1FA и $B_1F_1D_1$. По условию задачи они оба равносторонние, и поэтому при повороте вокруг точки B_1 на 60° против часовой стрелки вершина F переходит в вершину A, точка F_1 — в точку D_1. Получается, что треугольник B_1FF_1 поворотом переводится в треугольник B_1AD_1 (см. рисунок на предыдущей странице). Значит, отрезок FF_1 переходит в отрезок AD_1, откуда следует, что $FF_1 = AD_1$ и что $\angle(FF_1, AD_1) = 60^\circ$.

Теперь рассмотрим равносторонние треугольники EFA_1 и EF_1D. При повороте вокруг точки E на угол 60° против часовой стрелки вершина F переходит в точку A_1, а точка F_1 — в вершину D. Получается, что треугольник EFF_1 переходит в EA_1D, следовательно, отрезок FF_1 совмещается с отрезком A_1D, тогда $FF_1 = A_1D$, $\angle(FF_1, A_1D) = 60^\circ$.

Аналогично, рассматривая равносторонние треугольники BC_1A и BCD_1, получаем, что $C_1C = AD_1$ и $\angle(C_1C,\, AD_1) = 60^\circ$.

Сопоставляя выводы трех предыдущих абзацев, записываем связь между отрезками C_1C и AD_1:

$$C_1C = AD_1 = FF_1 = A_1D,$$

$$\begin{aligned}\angle(C_1C,\, A_1D) &= \angle(C_1C,\, AD_1) + \angle(AD_1,\, FF_1) + \angle(FF_1,\, A_1D) = \\ &= \angle(C_1C,\, AD_1) - \angle(FF_1,\, AD_1) + \angle(FF_1,\, A_1D) = \\ &= 60^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 60^\circ\,.\end{aligned}$$

Рассмотрим поворот вокруг точки E_1 на угол 60° против часовой стрелки. Треугольник E_1CD правильный, и поэтому точка C перейдет в точку D. Заметим, что треугольник E_1CC_1 при таком повороте совместится с треугольником EDA_1, так как отрезки CC_1 и DA_1, как уже установлено, равны по длине и находятся под углом 60° друг к другу.

Получили, что точка C_1 переходит в точку A_1 при повороте вокруг E_1 на угол 60°. Следовательно, треугольник $E_1C_1A_1$ — равносторонний, что и требовалось доказать.