1. *Ответ.* $\frac{337}{1010}$.

Решение. В искомом произведении n-й множитель равен

$$1-\frac{2}{f(n)}=\frac{f(n)-2}{f(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Подставляя эту дробь при $n=1, 2, \ldots, 2019$ в произведение и производя сокращения, получим

$$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{2018\cdot 2021}{2019\cdot 2020}\cdot\frac{2019\cdot 2022}{2020\cdot 2021}=\frac{1\cdot 2022}{3\cdot 2020}=\frac{337}{1010}.$$

2. *Первое решение.* Пусть a и b — числа, стоящие слева и справа от курсора соответственно, и число b состоит из n цифр. Тогда по условию $10^n a+b$ делится на 7. Если между числами a и b вставить одну цифру x, то получим число $10^{n+1}a+10^n x+b$. Можно подобрать эту цифру так, чтобы это число также делилось на 7, так как при $x=0, 1, 2, \ldots, 6$ такие числа имеют различные остатки при делении на 7.

По индукции докажем, что если вставить m цифр x, $m\geqslant 1$, то получившееся число также будет делиться на 7. База индукции ($m=1$) проверена выше. Для шага индукции достаточно доказать, что разность

$$\overline{a\underbrace{xx\ldots x}_{m+1\text{ раз}}b}-\overline{a\underbrace{xx\ldots x}_{m\text{ раз}}b}$$

делится на 7, где $\overline{ab}$ означает число, составленное из последовательно приписанных друг к другу записей чисел (цифр) a и b. Эта разность при некотором $k>m$ равна

$$10^{k+1}a-10^k(x-a)=10^{k-m}(10^{m+1}a+10^m x-10^m a)$$

и имеет тот же остаток при делении на 7, что и число $10^{k-m}(10^{m+1}a+10^m x+b)$, а последнее делится на 7 по предположению индукции.

Второй способ. Пусть a и b — те же, что и в первом способе. После вставки m цифр x полученное число имеет вид

$$a\cdot 10^{m+n}+\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{m\text{ раз}}\cdot 10^n+b.$$

Подберем цифру x так, чтобы при любом $m\in\mathbb{N}$ это число делилось на 7. Вычтем из него по условию делящееся на 7 число $10^n a+b$. Получим число

$$10^n(10^m-1)a+\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{m\text{ раз}}\cdot 10^n=$$

$$=10^n(10^m-1)a+10^n x\cdot\frac{10^m-1}{9}=10^n(9a+x)\cdot\frac{10^m-1}{9}.$$

Цифру x можно подобрать в зависимости от остатка от деления числа a на 7 так, чтобы число $2a+x$, а значит и $9a+x$, делилось на 7. Это соответствие можно указать явно с помощью следующей таблицы:

$a \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
цифра x	0 или 7	5	3	1	6	4	2

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. *Первое решение.* Если одно из этих чисел (например, n) равно 1, то неравенство принимает вид $|m-1|>\frac{1}{m}$ и выполнено при любом $m\geqslant 2$. Далее без ограничения общности будем считать, что $m>n\geqslant 2$. Тогда $m\geqslant n+1$, поэтому

$$\sqrt[n]{m}-\sqrt[m]{n}>\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \quad\text{и}\quad \frac{1}{n(n+1)}\geqslant\frac{1}{mn}.$$

Следовательно, достаточно доказать неравенство $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}>\frac{1}{n(n+1)}$ для всех $n\geqslant 2$. Используя тождество

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-1}+b^{n-1}),$$

в котором положим $a=\sqrt[n]{n+1}$ и $b=\sqrt[n]{n}$, а также учитывая неравенство $a>b$, получаем

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}=\frac{1}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}>$$
$$>\frac{1}{na^{n-1}}=\frac{1}{n(n+1)^{\frac{n-1}{n}}}>\frac{1}{n(n+1)}.$$

Второе решение. Докажем сначала вспомогательное утверждение: если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна и возрастает на отрезке $[a;b]$, то $f(b)-f(a)>$ $>f'(a)(b-a)$. Действительно, в этом случае касательная в точке a к графику функции $y=f(x)$ лежит ниже этого графика, и поэтому пересекает отрезок между точками $(b,f(a))$ и $(b,f(b))$ в некоторой точке (b,y_0), $f(a)<y_0<f(b)$. Следовательно, $f(b)-f(a)>y_0-f(a)=f'(a)(b-a)$.

Пусть, для определенности, $m>n$, тогда $\sqrt[n]{m}>\sqrt[m]{n}$. Применим доказанное выше утверждение к функции $f(x)=e^x$ (ее производная равна $f'(x)=e^x$) на отрезке $\left[\frac{\ln n}{m};\frac{\ln m}{n}\right]$:

$$m^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{m}}=e^{\frac{\ln m}{n}}-e^{\frac{\ln n}{m}}>e^{\frac{\ln n}{m}}\left(\frac{\ln m}{n}-\frac{\ln n}{m}\right)\geqslant\frac{m\ln m-n\ln n}{mn}.$$

Применяя еще раз это же утверждение к функции $g(x)=$ $=x\ln x$ (тогда $g'(x)=\ln x+1$) на отрезке $[n;m]$, получаем

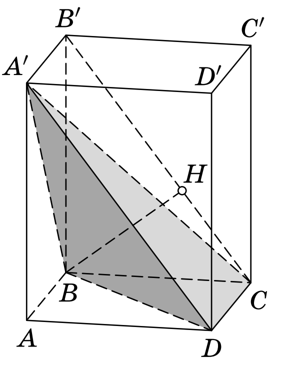
$$m\ln m-n\ln n>(\ln n+1)(m-n)\geqslant m-n\geqslant 1.$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

5. *Ответ.* Не может.

Решение. Предположим, что это возможно, и исходный тетраэдр $A'BCD$ проецируется в квадрат $ABCD$ со стороной 1. Достроим исходный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, имеющего размеры $1\times1\times x$.

Заметим, что исходный тетраэдр симметричен относительно плоскости $AA'C'C$. Поэтому при проекции на плоскость грани $A'BD$ трапеция получиться не может (если две противоположные стороны параллельны, то две другие тоже параллельны). В силу симметрии достаточно рассмотреть проекцию на плоскость грани $A'CD$. Проведем высоту BH в треугольнике $B'BC$ (см. рис.). Тогда точка H — проекция точки B на плоскость $A'B'CD$, так как прямая BH перпендикулярна двум пересекающимся прямым CB'



и CD в этой плоскости, а значит, и самой плоскости. Поэтому при проекции исходного тетраэдра на плоскость грани $A'CD$ получается трапеция $A'HCD$. Из прямоугольного треугольника $BB'C$ в силу подобия получаем $HC : BC = BC : B'C$. Отсюда находим

$$HC = \frac{BC^2}{B'C} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Площадь трапеции $A'HCD$ равна

$$S(x) = DC \cdot \frac{A'D + HC}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \geqslant 1$$

(здесь мы воспользовались неравенством о средних для двух положительных чисел: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$). При этом равенство достигается, только если слагаемые равны между собой, т. е. при $x = 0$. Но $x > 0$, поэтому $S(x) > 1$.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.