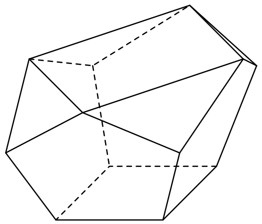
LXXXII Московская математическая олимпиада

23 марта 2019 года ♦ 11 класс, второй день

Задача 1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

Задача 2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

Задача 3. У многогранника, изображённого на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXII Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

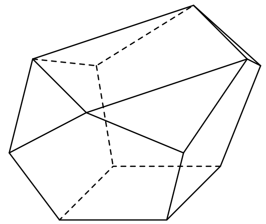
LXXXII Московская математическая олимпиада

23 марта 2019 года ♦ 11 класс, второй день

Задача 1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

Задача 2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

Задача 3. У многогранника, изображённого на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXII Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`