



## Условия задач, ответы, критерии оценивания

### 1. Шарик на ниточке (10 баллов), Крюков П. А., Ромашка М. Ю.

Человек раскручивает в вертикальной плоскости полиуретановый шарик, закреплённый на одном конце тонкой, но прочной, нерастяжимой нитки, держась за петельку на другом её конце. Когда скорость шарика становится достаточно большой и почти перестаёт изменяться, точка, в которой человек держит петлю, движется по окружности радиусом  $r$ . Определите минимально возможное значение  $r$ , если длина нитки между петлёй и шариком равна  $L = 1$  м, а радиус шарика равен 1 см. Плотность полиуретана равна  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>. Сила сопротивления воздуха даётся соотношением  $F_D = \frac{\rho_0 v^2}{4} S$ , где  $\rho_0$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь поперечного сечения шара,  $v$  — его скорость. Молярная масса воздуха равна  $\mu = 29$  г/моль. Воздух находится при нормальных условиях. Можно считать, что  $v \gg \sqrt{gL}$ . Ускорение свободного падения равно  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ:  $r \approx L \cdot \frac{3L}{16\rho R_0} \cdot \frac{p\mu}{RT} \approx 20$  мм.

### Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

Получен правильный ответ, удовлетворяющий неравенству  $18 \text{ мм} \leq r \leq 22 \text{ мм}$ , а также дано непротиворечивое обоснование соотношений, приводящих к ответу — **10 баллов**.

Правильное решение предполагает использование законов Ньютона или «энергетического метода», состоящего в том, что сумма работы силы натяжения (в точке, где человек держит нитку) и силы сопротивления воздуха приравнивается нулю. Решение с использованием «энергетического метода» оценивается на усмотрение проверяющего на основе распределения баллов, приведённого ниже для решения, использующего законы Ньютона. Поскольку в формулах встречаются комбинации постоянных и заданных в условии параметров, соотношения, которые записывают школьники, могут отличаться по виду (но не по существу) от тех, что приведены в авторском решении. Плотность воздуха может быть вычислена, как для температуры  $T = 273$  К, так и для температуры  $T = 293$  К. Всё это не должно приводить к уменьшению количества баллов, выставляемых за решение задачи.

Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).

1. Записаны выражения для тангенциальной и радиальной составляющих силы натяжения нитки в любом виде (не обязательно, как в решении) — **1 балла**.
2. Сказано, что силой тяжести можно пренебречь — **1 балл**.
3. Верно вычислена плотность воздуха для нормальных условий ( $T = 273$  К,  $p_0 = 10^5$  Па) или для температуры  $T = 293$  К и давления  $p_0 = 10^5$  Па — **1 балл**.
4. Получено выражение для тангенса (или другой тригонометрической функции) угла между ниткой и радиусом, проведённым из центра окружности к шарiku (отношение силы сопротивления и силы натяжения) — **1 балл**.
5. Сказано, что минимальный радиус окружности достигается, когда направление нитки совпадает с касательной к окружности — **2 балла**.
6. Указано, что угол между ниткой и радиусом, проведённым в точку, где находится шарик, малый (это может быть указано на любом этапе решения) и сделаны соответствующие упрощения формул — **1 балл**.
7. Получено соотношение для угла между ниткой и радиусом

$$\varphi \approx \frac{3\rho_0 \cdot L}{16\rho \cdot R_0}$$

или аналогичное — **2 балла**.

**2. Плазменная частота (12 баллов), Лэнгмюр И.**

Частоту колебаний пространственного заряда в плазме (ионизованном газе) можно определить на основании следующих модельных представлений. Имеется слой плазмы в виде прямоугольного параллелепипеда. Концентрация ионов с зарядом  $+e$  равна  $n$  и равна концентрации электронов. Ионы и электроны в слое распределены однородно. Можно считать, что слой электронов накладывается на слой ионов. Толщина слоя  $d$  много меньше других его линейных размеров. При малом смещении  $x$  ( $x \ll d$ ) слоя электронов в направлении нормали к слою (рис. 1) возникают малые колебания. Определите угловую частоту  $\omega$  этих колебаний. Считайте, что однородность распределения зарядов не нарушается, концентрация не меняется, ионы (поскольку они тяжёлые) — неподвижны. Масса электрона равна  $m_e$ , его заряд равен  $e$ .

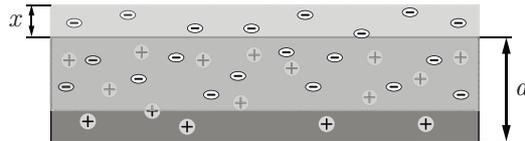


Рис. 1

Ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}}$ .

**Распределение баллов и рекомендации по оценке решений**

Получен правильный ответ в виде формулы

$$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}},$$

а также дано непротиворечивое обоснование соотношений, приводящих к ответу — **12 баллов**

Правильное решение предполагает использование второго закона Ньютона или дифференцирование закона сохранения энергии («энергетический метод»). При динамическом подходе (авторское решение), если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).

1. Высказано соображение о том, что при смещении слоя электронов относительно слоя ионов на величину  $x$  система представляет собой «плоский конденсатор» — **1 балл**

2. Записано выражение

$$q = nexS$$

для заряда «пластин» этого «конденсатора» — **2 балла**

3. Записана формула

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0}$$

для напряжённости поля внутри «конденсатора» — **1 балл**

4. Получена формула

$$F = \frac{Sd(ne)^2}{\varepsilon_0} \cdot x$$

для силы, действующей на электроны внутри «конденсатора», — **2 балла**

5. Сказано, что силой, действующей на пластины «конденсатора» можно пренебречь, поскольку по условию величина смещения  $x \ll d$  — **2 балла**

6. Написано выражение

$$m = dSnm_e$$

для массы слоя электронов — **2 балла**

7. Получено дифференциальное уравнение колебаний в любом виде — **2 балла**

Решение с использованием «энергетического метода» оценивается на усмотрение проверяющего, с учётом критериев, приведённых выше для решения на основе законов Ньютона. Например, за верно найденные: заряд пластин «конденсатора», массу слоя электронов, напряжённость поля выставляются такие же баллы, как и при динамическом подходе.

**3. Цепь с неизвестными** (14 баллов), Крюков П. А.

В цепи, изображённой на рис. 2, сопротивление каждого из резисторов равно  $R$ . Выводы  $A$  и  $B$  цепи на время  $t_0$  подключают к идеальному источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Индуктивность катушки и ёмкость конденсатора подобраны таким образом, что при подключенном источнике в любой момент времени разность потенциалов точек  $E$  и  $F$  равна нулю. Определите заряд, протекающий через источник за время  $t_0$ . Если за время подключения источника в резисторах суммарно выделяется количество теплоты  $Q$ , то какое количество теплоты выделится в одном резисторе после отключения источника?

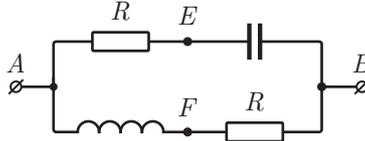


Рис. 2

Ответ:  $q = \frac{\mathcal{E}t_0}{R}$ ; в каждом резисторе выделяется количество теплоты, равное  $Q_1 = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}$ .

**Распределение баллов и рекомендации по оценке решений**

Общая схема, которой следует придерживаться, оценивая решения к данной задаче, предполагает, что выставляется 8 баллов за полностью правильный, обоснованный ответ на первый вопрос и ещё 6 баллов за аналогичный ответ на второй вопрос. При этом доказательный вывод ключевого соотношения, связывающего параметры цепи,  $CR^2 = L$  оценивается суммарно в 5 баллов, а вывод важного для ответа на второй вопрос равенства  $W_C(t) = W_L(t)$  оценивается в 4 балла. Детальное распределение баллов приведено ниже.

1. Записано условие равенства потенциалов точек  $E$  и  $F$  в виде уравнений:

$$i_C R = L \frac{di_L}{dt}, \quad \frac{q}{C} = i_L R$$

или записаны аналогичные соотношения — **1 балл**.

2. Получено соотношение, связывающее сопротивление любого из резисторов  $R$ , индуктивность катушки  $L$  и ёмкость конденсатора  $C$

$$CR^2 = L,$$

так как в решении или иным другим непротиворечивым способом — **4 балла**.

3. Показано, что через источник течёт постоянный ток — **2 балла**.

4. Получен ответ на первый вопрос в виде равенства  $q = \frac{\mathcal{E}t_0}{R}$  — **1 балл**.

5. Доказано равенство энергий магнитного поля катушки  $W_L(t)$  в момент времени  $t$  и конденсатора  $W_C(t)$  в тот же момент времени при подключенном источнике:  $W_C(t) = W_L(t)$ , так как в авторском решении или иным способом — **4 балла**.

Если это равенство приводится без какого-либо объяснения или доказательства — **2 балла**.

6. Записан закон сохранения энергии и получена формула

$$W_L(t_0) = W_C(t_0) = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}$$

или аналогичная — **1 балл**.

7. Получена формула

$$Q_1 = W_L(t_0) = W_C(t_0) = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2},$$

представляющая собой верный ответ на второй вопрос задачи — **1 балл**.

## 4. Фотография пластины (18 баллов)

Бычков А. И., Крюков П. А.

Диск толщиной около 1,5 см, сделанный из прозрачного материала, разрезали вдоль одного из диаметров. Получившуюся пластину, имеющую форму половины цилиндра, поставили на «миллиметровку», так что поверхность, вдоль которой разрезали диск, оказалась обращена вниз, а выпуклая поверхность полуцилиндра — вверх. Затем эту пластину фотографируют сверху, стараясь ориентировать оптическую ось объектива фотоаппарата вертикально (рис. 3), так чтобы она проходила через середину пластины. Фотография приведена ниже.

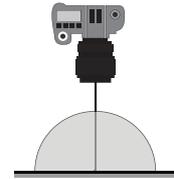


Рис. 3

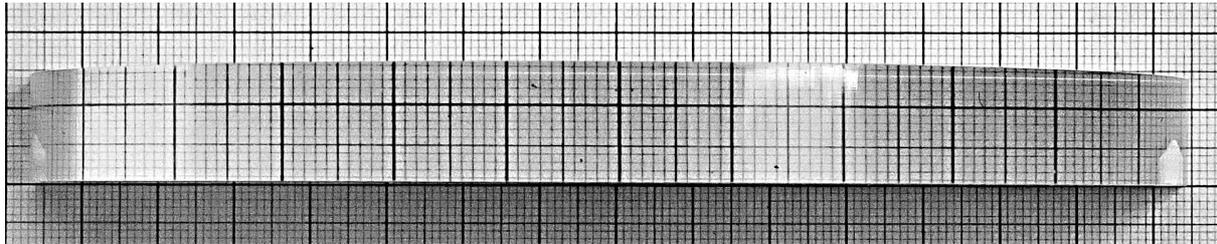


Рис. 4

1) Определите показатель преломления материала пластины. (9 баллов)

2) На фотографии внутри пластины видны изображения полос сетки. Какое максимальное количество изображений полос, перпендикулярных пластине, может увидеть наблюдатель, располагающийся на расстоянии  $h = 15$  см над центром пластины? (6 баллов)

3) Оцените расстояние  $H$  от «миллиметровки» до главной плоскости объектива фотоаппарата при фотографировании пластины. (3 балла)

Ответ: 1)  $n = 1,47 \pm 0,05$ ; 2)  $N = 103 \pm 3$ ; 3)  $H \approx 28 \pm 4$  см.

## Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

1) Получен правильный ответ, удовлетворяющий неравенству  $1,42 \leq n \leq 1,52$ , а также приводится непротиворечивое обоснование соотношений, приводящих к ответу — **9 баллов**

Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).

а) Высказано соображение, что пластина представляет собой комбинацию плоскопараллельной пластинки толщиной  $R$  и тонкой плосковыпуклой линзы с радиусом выпуклой поверхности, равным  $R$  — **2 балла**.

б) Написано выражение

$$x = R \cdot \frac{n-1}{n}$$

для расстояния, на котором формирует изображение источника плоскопараллельная пластина — **1 балл**.

в) Написано выражение

$$D = \frac{n-1}{R}$$

для оптической силы плосковыпуклой линзы — **1 балл**.

д) Верно записана формула линзы — **1 балл**.

е) Сделан вывод, что изображение находится там же, где предмет — **1 балл**.

Если высказано соображение, что объектив сфокусирован на миллиметровку и изображение сетки получается резким, следовательно, находится там же, где предмет, но при этом не приводится доказательства, содержащего выкладки пунктов (а)-(е) — **3 балла**.

ф) Написано выражение

$$\Gamma = \frac{|a'|}{R-x} = n$$

для увеличения, рассматриваемой оптической системы — **2 балла**.

Выражение для увеличения может быть получено и без разделения полуцилиндра на комбинацию плоскопараллельной пластинки и тонкой линзы. Можно рассмотреть непосредственно

преломление лучей и получить ту же формулу для увеличения. В этом случае решение оценивается на усмотрение проверяющего с учётом распределения баллов, приведённого выше для авторского решения.

2) Получен правильный ответ, удовлетворяющий неравенству  $95 \leq N \leq 110$ , а также приводится непротиворечивое обоснование соотношений, приводящих к ответу — **6 баллов**.

Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).

а) Высказано соображение, что наблюдатель может видеть только те линии сетки, которые лежат между точками, от которых лучи падают на сферическую границу раздела под углом полного внутреннего отражения, а после преломления попадают в глаз наблюдателя — **2 балла**.

б) По фотографии определен радиус кривизны полуцилиндра, удовлетворяющий неравенству  $73 \text{ мм} \leq R \leq 77 \text{ мм}$  — **1 балл**.

в) Из геометрических соображений написано правильное соотношение между радиусом  $R$  и расстоянием между центром пластины и точкой, описанной в пункте 2а) — **2 балла**.

3) Получен правильный ответ, удовлетворяющий неравенству  $H > 24 \text{ см}$ , а также приводится непротиворечивое обоснование соотношений, приводящих к ответу — **3 балла**.

Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит какие-нибудь правильные промежуточные результаты — **1 балл**

### 5. Электрокалорический генератор (18 баллов)

В электродинамике при описании диэлектриков вводится в рассмотрение вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Вектор  $\mathbf{D}$  количественно характеризует поле только (!) свободных зарядов, вектор  $\mathbf{E}$  — поле свободных зарядов и поляризационных зарядов, возникающих в диэлектриках. Обычно вектор  $\mathbf{D}$  пропорционален вектору  $\mathbf{E}$ . Однако, существуют материалы (*сегнетоэлектрики*) с нелинейной зависимостью  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$ . В этой задаче векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  сонаправлены. Схематично вид зависимости  $D(E)$  для типичного сегнетоэлектрика при постоянной температуре показан на рис. 5 чёрной линией. Зависимость  $D(E)$  для того же сегнетоэлектрика при более высокой температуре схематично показана серой линией. Обе зависимости обладают ярко выраженным гистерезисом, иначе говоря, значение  $D$  для данного  $E$  зависит от характера изменения поля  $E$  (увеличивается или уменьшается). Впрочем, в данной задаче это несущественно.

Вид зависимости  $D(E)$  в некоторых сегнетоэлектриках весьма сильно меняется с температурой, что позволяет их использовать для преобразования тепловой энергии в электрическую. Присоединим конденсатор с сегнетоэлектриком к идеальному источнику постоянного напряжения. Периодически изменяя температуру сегнетоэлектрика, можно получить периодически изменяющийся ток в цепи. При этом работа источника напряжения за цикл будет равна нулю. Получится преобразователь тепловой энергии в работу тока. Можно считать, что сегнетоэлектрик — это своеобразное рабочее тело тепловой машины, которое характеризуется параметрами:  $D$ ,  $E$ ,  $T$ .

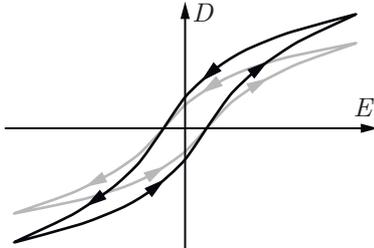


Рис. 5

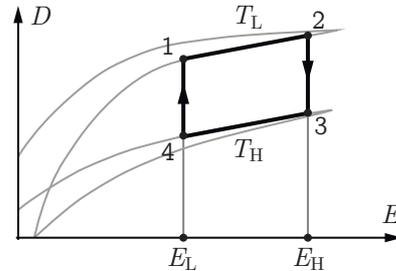


Рис. 6

Рассмотрим модельный цикл, показанный на рис. 6. Процессы 1–2 и 3–4 — зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком при постоянной температуре. 2–3 и 4–1 — нагревание и охлаждение при постоянном электрическом поле. Цикл имеет форму параллелограмма.

Термодинамика сегнетоэлектрика описывается соотношениями, справедливыми для малых (!) изменений параметров  $\Delta E$ ,  $\Delta D$ ,  $\Delta T$ :

$$\Delta D = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta E + p \Delta T, \quad \frac{\Delta Q}{V} = c \Delta T + p T \Delta E, \quad \frac{\Delta A}{V} = D \Delta E,$$

где  $\varepsilon$ ,  $p$  и  $c$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $p < 0$ ,  $c > 0$ ) — известные постоянные коэффициенты. Объём  $V$  считается постоянным.  $\Delta Q$  и  $\Delta A$  — количество теплоты и работа при малых изменениях параметров. Для решения задачи этих соотношений достаточно.

1) Определите КПД цикла 1234. Величины  $E_L$ ,  $E_H$  и  $T_L$ ,  $T_H$  считайте известными ( $T_L < T_H$ ). Если предположить, что  $E_L$  и  $E_H$  могут изменяться неограниченно, то чему равен максимальный КПД этого цикла? (7 баллов)

2) Изобразите качественно на диаграмме  $D$ – $E$  термодинамический цикл 12'34', в котором на участках 1–2' и 3–4' зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком происходят адиабатически. Температуры в точках 1 и 3 равны  $T_L$  и  $T_H$ . (5 баллов)

3) Определите КПД цикла из п. 2), считая  $E_L$ ,  $E_H$  и  $T_L$ ,  $T_H$  известными, а изменения параметров  $D$ ,  $E$  и  $T$  в пределах цикла малыми. У какого цикла при одинаковых  $E_L$ ,  $E_H$ ,  $T_1 = T_L$  и  $T_3 = T_H$  больше КПД — у 1234 или у 12'34'? (6 баллов)

Ответ: 1)  $\eta_1 = \frac{-p(T_H - T_L)(E_H - E_L)}{c(T_H - T_L) - pT_H(E_H - E_L)}$ ; 2) см. рис. 7; 3)  $\eta_2 = \frac{r \Delta T}{\Delta T - r T_L}$ , где  $r = -\frac{p \Delta E}{c}$ ,  $\eta_2 > \eta_1$ .

#### Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

1) Если получен правильный ответ на первый вопрос — 3 балла.

Получены верные ответы на оба вопроса п. 1) — 7 баллов.

Если участник приступил к п. 1) задания, но при этом не получил правильные ответы, ставятся утешительные **2 балла** (за смелость).

2) Правильно изображен на  $D - E$  диаграмме термодинамический цикл (рис. 7) — **5 баллов**.

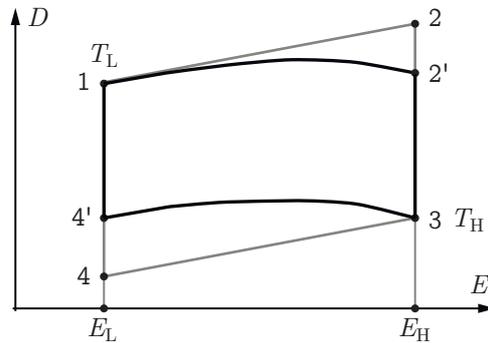


Рис. 7

Оцениваться должен только качественный вид графика.

Если участник не приступил к выполнению п. 3), но вывел уравнение адиабатического процесса, используя интегрирование, то ставятся дополнительные **3 балла** (помимо **5 баллов** за график).

Если представлена неправильная диаграмма цикла, сопровождаемая ошибочными рассуждениями, то ставятся утешительный **1 балл** (за смелость).

3) Верно найден КПД цикла 1234 — **3 балла**.

Верно найден КПД цикла 12'34' — **3 балла**.

Если участник приступил к п. 3) задания, но при этом не получил правильные ответы, ставится утешительный **1 балл** (за смелость).

Примечание. Возможность практического использования электрокалорического эффекта в сегнетоэлектриках для преобразования тепловой энергии в электрическую исследовалась в восьмидесятые годы. Тема не получила развития, поскольку в экспериментах наблюдались низкие энергетический выход и КПД. Возобновление интереса к исследованиям в этой области произошло после открытия в 2006 году сегнетоэлектриков, демонстрирующих очень большой электрокалорический эффект (Giant Electrocaloric Effect in Thin-Film  $\text{PbZr}_{0.95}\text{Ti}_{0.05}\text{O}_3$ ), группой исследователей из Кембриджского университета. Хочется отметить, что одним из основных участников этой научной группы был выпускник физического факультета МГУ Александр Мищенко. В статье, посвящённой открытию, и опубликованной в Science, первым автором указан именно он. В 2006-2007 годах Александр получил несколько международных премий для молодых учёных, а один из колледжей Кембриджского университета (Churchill College) учредил награду в его честь (Alex Mischenko Prize), которая выдаётся студентам, подготовившим лучший стендовый доклад для ежегодной студенческой конференции. Одновременно в 2007 году он защитил кандидатскую диссертацию по другой тематике в МГУ. К сожалению, в том же 2007 году Александр ушёл из жизни.