Московский центр непрерывного математического образования

VII Заочная Интернет-олимпиада по теории вероятностей и статистике для 6 – 11 классов

Эссе

Традиционно первые три задания в нашей олимпиаде – эссе. Мы предлагаем провести самостоятельное исследование на заданную тему и прислать нам результаты, наблюдения и гипотезы. Лучшие эссе публикуются. Награждение в конкурсе эссе проводится отдельно от конкурса задач, независимо от возраста автора эссе.

1. Жребий с одной монетой (10 баллов). Вот задача, с которой однажды столкнулись пятеро: нужно было бросить справедливый жребий, чтобы выбрать одного из них. Из подручных средств была только монетка. Возникло два предложения, как можно организовать жребий.

Первое предложение. *Все пятеро бросают монетку по очереди. Те, у кого выпала решка, выбывают из розыгрыша, а те, у кого выпал орёл, — остаются. Оставшиеся еще раз бросают по монетке — делают новый круг. И так далее. Если на каком-то круге все выбросят решки, то круг не считается и разыгрывается еще раз. Бросание продолжается до тех пор, пока на каком-то из кругов не останется только один участник, у которого выпал орёл. Он и считается победителем жребия.*

Второе предложение. *Каждому участнику присвоим номер от 0 до 4. Затем бросаем монету 3 раза. Если выпал орёл, то записываем единицу. Если решка, — записываем ноль. Получается двоичная последовательность длины три. Интерпретируем ее как число от 0 до 7. Например, если бросания дали «орёл-решка-орёл», получается*

$$101_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 5.$$

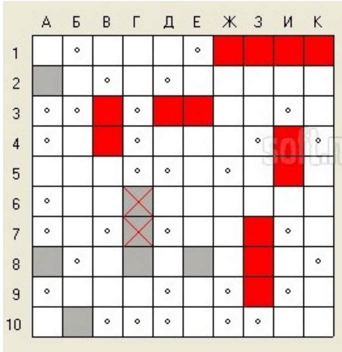
Если полученное число от 0 до 4, то выигрывает тот, чей номер получился. Если число от 5 до 7, то бросания не засчитываются и всё повторяется еще раз.

Приведут ли рано или поздно оба способа к цели, то есть не может ли получиться бесконечная серия бросаний? Какой способ в среднем быстрее выявит победителя? Можно ли как-нибудь подсчитать или хотя бы оценить математическое ожидание числа бросков (то есть времени), которое придётся сделать, если пользоваться первым способом? А если пользоваться вторым способом?

Попробуйте придумать какой-нибудь свой метод. Может быть, вам удастся сделать его более экономичным, чем наши.

В общем, мы предлагаем вам провести вероятностный анализ задачи, причем настолько полный и подробный, насколько у вас получится.

2. Морской бой (10 баллов). Надеемся, вы умеете играть в морской бой. Если нет, то правила игры найдутся в интернете. А можно спросить у знающих людей.



Морской бой — игра вероятностная. Почти каждый раз игрок делает выстрел наудачу. Вероятность попадания зависит от того, сколько на поле противника осталось свободного места, как расположены корабли, какой стратегии (схемы игры) придерживается сам игрок.

Мы остановимся только на одном аспекте — на расположении кораблей в начале игры. Зависит ли вероятность выигрыша от того, как именно противник расставил корабли? Каких правил расстановки нужно придерживаться, чтобы увеличить свои шансы на победу? А как корабли расставлять не следует? Попробуйте провести вероятностный анализ этой задачи настолько полный, насколько это возможно. Чем более глубокий и аргументированный анализ вы проведете, тем лучше и тем больше баллов вы заработаете на этой непростой задаче.

2. Куда лететь быстрее? (10 баллов). Правда ли, что самолёт тратит на полёт разное время, в зависимости от того, на восток или на запад он летит? Всегда ли это так? Зайдите на сайт крупного аэропорта или крупной авиакомпании, а лучше — нескольких авиакомпаний или аэропортов. Выберите перелёты с востока на запад и обратно. Соберите и обработайте нужную информацию. Насколько отличаются продолжительности полётов в ту и в другую сторону? Зависит ли это от расстояния? Нужно придумать статистический показатель, описывающий разницу. Устойчивая ли она? Трудность в том, что просто разность времени туда и времени обратно нам мало что даст — ведь нужно учитывать и очень дальние перелёты и сравнительно короткие. Если разница есть, с чем она может быть связана? Можно ли оценить постоянство и силу этого удивительного фактора? Действительно ли виноваты восток и запад? Может быть, похожая картина наблюдается и с другими полётами, например, с севера на юг и обратно? Вопросов множество. Попробуйте разыскать, описать, проанализировать данные и пофантазировать.

Задачи

Этот раздел традиционно содержит 16 заданий. Около каждой задачи указано, для каких классов мы ее рекомендуем, хотя наши рекомендации очень приблизительны. Решать задачи не возбраняется никому. Оцениваются отдельно работы учащихся 6 – 7, 8 – 9 и 10 – 11 классов.

4. Кодовый замок. Петя подходит к двери подъезда с кодовым замком, на замке расположены кнопки с цифрами от 0 до 9. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать три правильные кнопки. Петя не помнит код, и пробует по очереди комбинации. На каждую попытку Петя тратит 2 секунды.

а) (6 – 11 классы, 1 балл) Сколько времени понадобится Пете, чтобы наверняка попасть в подъезд?

б) (6 – 11 классы, 1 балл) Сколько времени в среднем понадобится Пете?

в) (6 – 11 классы, 1 балл) Какова вероятность того, что Петя попадет в подъезд менее чем за одну минуту?

5. Первоклассник (6 – 11 классы, 2 балла). Максим пойдёт в первый класс 1 сентября 2014 года в возрасте 6 лет, и этот день не будет днём его рождения. Какова вероятность того, что он родился в 2008 году?

6. Стратегия великого комбинатора (6 – 11 классы, 2 балла). Остап Бендер играет в шахматы с Чемпионом Васюков, Чемпионом России и Чемпионом Мира. По правилам, чтобы стать Абсолютным Чемпионом, Остапу нужно выиграть две игры подряд. Бендер имеет право выбирать, в каком порядке ему играть с соперниками. Какой порядок для Остапа выгоднее?

7. Мультипликативные кости. Федя предложил Васе сыграть в игру: нужно бросить две игральные кости и перемножить выпавшие числа.

– Самое большое произведение 36, а самое маленькое 1, – заявил Федя. – Давай так: если произведение получилось от 1 до 18, то я выиграл, а если от 19 до 36, то выиграл ты.

а) (6 – 11 классы, 2 балла) Соглашаться ли Васе на такие условия игры?

б) (6 – 11 классы, 2 балла) Как изменить границу, чтобы игра стала справедливой?

8. Акции «Малони и Ко». В понедельник 7 апреля акция Торгового дома «Малони и Ко» стоила 5 анчурийских долларов. Последующие шесть дней акции не падали в цене или даже росли, и к воскресенью 13 апреля цена акции достигла 5 долларов 14 центов. На протяжении всей следующей недели акции не поднимались и даже падали в цене так, что 20 апреля акция снова стоила 5 долларов.

а) (6 – 11 классы, 2 балла) Приведите пример, как могли изменяться цены, так что средний курс за весь период с 7 по 20 апреля был выше, чем 5 долларов 9 центов, но ниже, чем 5 долларов 10 центов.

б) (6 – 11 классы, 2 балла) Обозреватель А. утверждает, что средний курс акции в период с 7 по 13 апреля был на 10,5 центов выше, чем средний курс в период с 14 по 20 апреля. Обозреватель Б. говорит, что А. неправ. Так кто же из них прав?

9. Сонные мухи (7 – 11 классы, 2 балла). Однажды в октябре Никита глянул на часы, висящие на стене, и увидел, что на циферблате уснули четыре мухи. Первая спала в точности на отметке 12, а остальные так же точно расположились на цифрах 3, 6 и 9.

– Надо же! Красиво! – восхитился Никита и даже пожалел мух, заметив, что часовая стрелка мухам не грозит, а вот минутная обязательно сметёт их всех по очереди.

Найдите вероятность того, что ровно через 20 минут после того, как Никита глянул на часы, две мухи уже были сметены.

10. Чаепитие Федоры Егоровны (7 – 11 классы, 3 балла). У Федоры Егоровны есть 3 чайные чашки. Однажды она их вымыла и начала новую жизнь. Каждый раз, чтобы выпить чаю, Федора берёт наудачу какую-нибудь чашку, а потом ставит её к остальным, но уже не моет. Найдите вероятность того, что во время пятого чаепития с момента начала новой жизни Федора Егоровна использует последнюю чистую чашку.

11. Первый туз. В некоторую карточную игру играют вчетвером. Чтобы определить, кому начинать игру обычно бросают жребий «до первого туза». Всего в колоде 32 карты, от семёрок до тузов. Один из игроков раздаёт всем карты в открытую по очереди по часовой стрелке (себе — последнему), пока кому-то не достанется туз. Этому игроку и предстоит начать игру.

а) (8 – 11 классы, 3 балла) Для каждого игрока найдите вероятность того, что ему достанется первый туз.

б) (6 – 11 классы, 1 балл) Как изменить правила, чтобы сделать жребий справедливым?

12. Предсказания (8 – 11 классы, 2 балла). В понедельник у Миши пять уроков, а во вторник — шесть. Чтобы предсказать, на каких уроках непредсказуемые учителя спросят у него домашнее задание, Миша бросает монету 11 раз — по числу возможных неприятностей. Если выпадает орёл, Миша считает, что на этом уроке его спросят, если решка — то не спросят. После уроков во вторник Миша констатировал, что ему удалось угадать 7 раз. Найдите вероятность того, что ровно 3 верных предсказания относились к понедельнику.

13. Лиса Алиса и кот Базилио (8 – 11 классы, 2 балла). Каждый день кот Базилио и лиса Алиса обходят все 20 дворов столицы Страны Дураков, и в каждом дворе им либо дают, либо не дают один золотой с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если к концу дня число выпрошенных золотых чётное, то лиса и кот делят их поровну. Если же оно нечётно, то они делят все монеты, кроме одной, поровну, а последнюю кот Базилио забирает себе как коммерческий директор предприятия. Найдите математическое ожидание числа монет, полученных котом за день.

14. Пять костей. Пять игральных костей бросают одновременно. Такой одновременный бросок нескольких костей будем называть *залпом.* Те кости, на которых выпали шестёрки, откладывают в сторону. А остальные бросают ещё раз — опять залпом. Те, что на второй раз не выпали шестёрками, бросают ещё раз и так далее, пока на всех костях не выпадут шестёрки.
а) (8 – 11 классы, 2 балла) Найдите математическое ожидание общего числа брошенных костей.
б) (9 – 11 классы, 4 балла) Найдите математическое ожидание общего числа очков, выпавших к моменту, когда все кости выпали шестёрками.
в) (9 – 11 классы, 6 баллов) Найдите математическое ожидание числа залпов.

15. Благородные девицы. Благородные девицы пошли в театр. Девиц всего n, и билеты у всех на один ряд, в котором ровно n кресел. Если девице, чтобы занять свое место, нужно пройти мимо уже сидящей девицы, то последняя должна вежливо встать, чтобы пропустить подругу.
а) (8 – 11 классы, 2 балла) Найдите математическое ожидание числа вставаний.
б) (9 – 11 классы, 5 баллов) Найдите математическое ожидание числа тех, кому не придётся встать ни разу.

16. Контрольная цифра (8 – 11 классы, 3 балла). Простоквашинская телефонная компания «Просто-Телеком» использует трёхзначные телефонные номера. Оборудование старое, поэтому при соединении возможны ошибки в отдельных цифрах передаваемого номера абонента — каждая цифра независимо от других с вероятностью $p = 0{,}02$ может быть заменена какой-то другой случайной цифрой. Для уменьшения вероятности неверного соединения компания использует следующее правило: первая цифра номера всегда равна остатку от деления на 10 суммы двух остальных цифр. Например, возможны номера 000 и 156, а номер 234 невозможен. Если при соединении контрольная цифра неверная, выдаётся сообщение об ошибке. Найдите вероятность того, что, несмотря на принятые меры, ошибочное соединение состоится.

17. Закрытое сельпо (8 – 11 классы, 3 балла). Ровно в полдень Анна Кузьминична выглянула в окно и увидела как Клава, продавщица сельпо, уходит на перерыв. В две минуты первого Анна Кузьминична снова посмотрела в окно — перед закрытым магазином еще никого не было. Клава отсутствовала ровно 10 минут, а когда она вернулась, нашла, что перед дверью топчутся Иван и Фома, очевидно, пришедший позже Ивана. Найдите вероятность того, что Фоме пришлось ждать открытия магазина не более 4 минут.

18. Дневник погоды (8 – 11 классы, 5 баллов). Весь март семиклассник Иванов вёл дневник наблюдений за погодой. Каждый день ровно в 3 часа дня он выглядывал в кухонное окно, смотрел на уличный термометр и записывал в дневник температуру воздуха. После статистической обработки получилось:

- Средняя температура за март: $\bar{x} = 0$ (градусов Цельсия).
- Медиана: $m = 4$ (градуса Цельсия).
- Дисперсия: $S^2 = 15,917$ (вероятно, квадратных градусов или градусов Квадратного Цельсия, но это Иванова не волновало).

Учительница географии была очень довольна и поставила Иванову пять. Учитель математики тоже был доволен Ивановым и велел ему идти искать ошибку. Почему учитель математики решил, что Иванов ошибся?

19. Пилюли. 28 февраля доктор прописал рассеянному Математику пилюли от рассеянности, которые надо принимать один раз в день после обеда. Математик купил две баночки, в каждой по 10 пилюль. Каждый день, начиная с 1 марта, Математик берёт с собой на работу одну из баночек (выбирая её случайным образом), после обеда достаёт из кармана баночку и принимает пилюлю.

а) (9 – 11 классы, 4 балла) Найдите вероятность того, что 14 марта Математик первый раз обнаружит, что в кармане лежит пустая баночка.

б) (9 – 11 классы, 4 балла) Найдите математическое ожидание числа пилюль, которые Математик принял к тому моменту, как обнаружил, что баночка пуста.