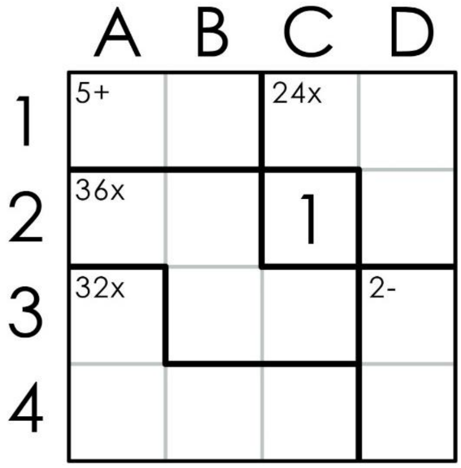
Задача 1. (10 баллов)

Для заполнения следующей таблицы используются только числа от 1 до 4. Каждое число должно встречаться по одному разу в каждой строке и каждом столбце.

Кроме того, при заполнении данной таблицы следует учитывать, что таблица разделена на области. В каждой из областей указано число и знак операции (+, -, × или ÷). Данная операция должна быть применена ко всем числам, находящимся в данной области в определенном порядке. Если числа в области подобраны правильно, то после выполнения указанной операции ко всем числам из данной области будет получено число, указанное в области.

Также в некоторых отдельных ячейках могут быть вписаны числа.

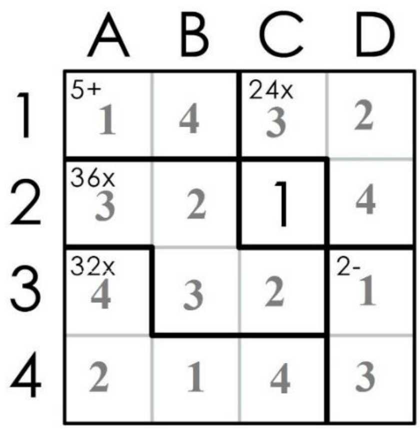


Например, если в области написано «1-», то при вычитании одного из чисел из данной области из другого числа из данной области должно получиться число 1.

Обратите внимание, что буквы и числа на внешней стороне таблицы нужны для удобства решения.

В ответе приведите полностью заполненную таблицу.

Ответ:



Задача 2. (10 баллов)

Алгоритм «сортировки вставкой» работает путем разделения массива на две части: отсортированная область - слева и неотсортированная область - справа. Вставляя элементы из неотсортированной области в отсортированную, алгоритм создает отсортированный массив.

Данный алгоритм можно описать следующим образом:

1. Обозначим самый левый элемент массива A как единственный элемент отсортированной части. Эта часть гарантированно отсортирована, поскольку в ней только один элемент.
2. Вставим первый элемент неотсортированной области в соответствующее место отсортированной области, увеличив число отсортированных элементов на один. Для этого выбранный элемент мы сравниваем с каждым из элементов слева от него, перемещаясь справа налево, пока не найдем, где он «помещается» в отсортированной части массива.
3. Повторяем шаг номер два, пока не останется неотсортированных элементов.

У вас есть массив, заполненный по следующему принципу:

- Первые четыре элемента – это первые четыре простых числа, упорядоченные по убыванию;
- Следующие четыре элемента – это квадраты первых четырех положительных целых чисел, упорядоченные по возрастанию;
- Девятый элемент массива равен произведению третьего и четвертого элементов массива.

Учтите, что индексация элементов в массиве начинается с индекса 1.

Сколько отдельных сравнений между элементами нужно будет сделать для того, чтобы отсортировать данный массив по возрастанию с помощью приведенного алгоритма?

Приведите подробное решение данной задачи.

Решение:

Запишем исходный массив:

7 5 3 2 ***1 4 9 16*** 6

Шаг 0

Отсортированный массив – 7

Шаг 1

Сравниваем элемент с индексом 2 (5) исходного массива с элементами отсортированного массива (1 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 5 7

Шаг 2

Сравниваем элемент с индексом 3 (3) исходного массива с элементами отсортированного массива (2 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 3 5 7

Шаг 3

Сравниваем элемент с индексом 4 (2) исходного массива с элементами отсортированного массива (3 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 2 3 5 7

Шаг 4

Сравниваем элемент с индексом 5 (1) исходного массива с элементами отсортированного массива (4 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 1 2 3 5 7

Шаг 5

Сравниваем элемент с индексом 6 (4) исходного массива с элементами отсортированного массива (3 сравнение). Получаем новый отсортированный массив:1 2 3 4 5 7

Шаг 6

Сравниваем элемент с индексом 7 (9) исходного массива с элементами отсортированного массива (1 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 1 2 3 4 5 7 9

Шаг 7

Сравниваем элемент с индексом 8 (16) исходного массива с элементами отсортированного массива (1 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 1 2 3 4 5 7 9 16

Шаг 6

Сравниваем элемент с индексом 9 (6) исходного массива с элементами отсортированного массива (4 сравнение). Получаем новый отсортированный массив: 1 2 3 4 5 6 7 9 16

Посчитаем количество сравнений и получаем ответ – 19 сравнений

Ответ: 19 сравнений

Задача 3. (10 баллов)

Даша решила сделать «мобиль». Она взяла две легких прочных твердых ровных балки и нанесла на них разметку с помощью маркера. Длинную балку Даша разделила на шесть равных частей, а короткую – на четыре равных части. Даша скрепила несколько шариков и балки вместе (см. *схему мобиля*). Получившийся мобиль она подвесила к потолку комнаты, после чего обе балки заняли горизонтальное положение.

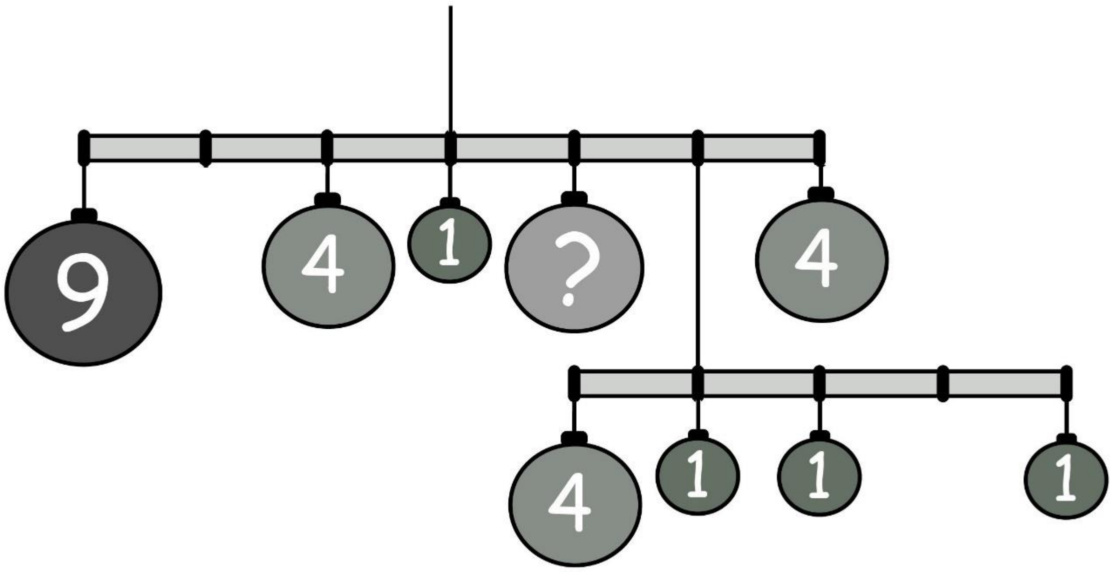


Схема мобиля

Длина большей балки равна 110 см. Длина короткой балки в 1,5 раза больше, чем половина длины большей балки. Считайте, что обе балки невесомы и нерастяжимы.

На схеме указаны массы шариков в условных единицах (1 у.е. = 0.1 кг). Масса одного шарика на схеме не указана. Считайте, что все балки невесомы и нерастяжимы.

Определите, чему равна масса шара, помеченного знаком вопроса. Ответ дайте в граммах. Приведите подробное решение данной задачи.

Справка

Мобиль – это вид кинетической скульптуры, основанный на принципах равновесия. Он состоит из нескольких стержней, на котором висят объекты или другие стержни. Объекты, висящие на стержнях, уравновешивают друг друга. Каждый стержень висит только на одной струне.

Решение:

Рассмотрим плечи рычагов. Хотя нам и дана длина каждой из балок, но, по сути, конкретные длины плеч нам не важны, поскольку у нас есть соотношение между длинами плеч. Соответственно, длины плеч рычагов можно выражать в условных единицах длины.

Стержни считаются невесомыми и недеформируемыми.

Чтобы учесть массы стержни, которые прикреплены к верхнему стержню, будем считать, что все массы, прикрепленные к нижнему стержню собраны в один шар, подвешенный в точке крепления стержня к верхнему стержню.

Тогда мы сможем принять массу короткой балки вместе с шарами за 1 шар массой 7 у.е.

Составим уравнение равновесие в условных единицах:

$$9 \times 3 + 4 \times 1 = 4 \times 3 + 7 \times 2 + x \times 1$$

$$31 = 12 + 14 + x$$

$$31 = 26 + x$$

$$x = 5 \text{ у. е.}$$

Определим, чему равна масса шара в граммах:

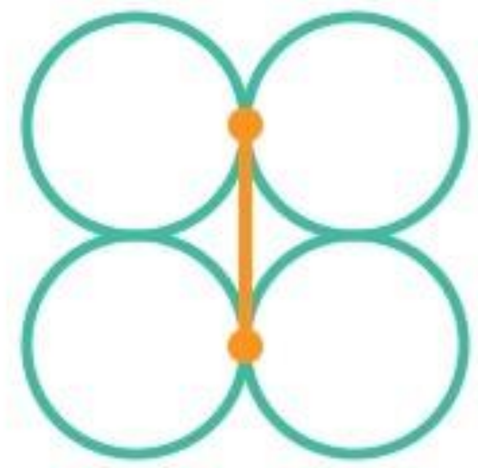
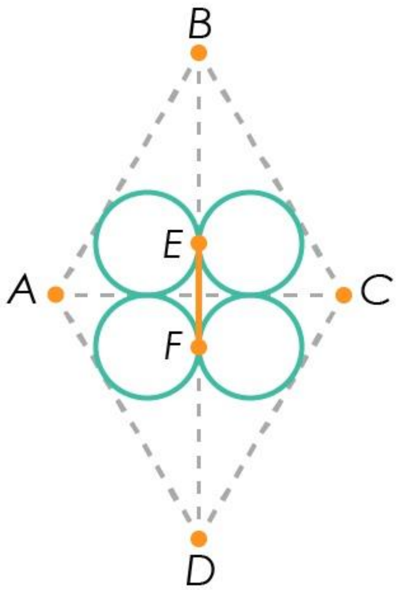
$$5 \text{ у. е.} = 5 \times 0{,}1 \text{ кг} = 0{,}5 \text{ кг} = 500\text{г}$$

Ответ: масса шара равна 500г.

Задача 4. (20 баллов)

Робот-чертежник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *эмблема*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет 40 см, радиус колеса робота 10 см, максимальная скорость вращения моторов 1 оборот за 4 секунды.

В случае необходимости резко изменить направление движения робот совершает танковый разворот на месте.

	
Эмблема	*Дополнительные построения*

Робот должен изобразить фигуру, состоящую из четырех окружностей и отрезка (см. *эмблему*). Чтобы определить их положение, необходимо провести ряд вспомогательных построений.

Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O (*не показана на чертеже*). BD = 8 м, AC = 6 м. В каждый из треугольников, образовавшихся при пересечении диагоналей, вписано по окружности (см. *дополнительные построения*). Точка E – это точка касания окружностей, расположенных в треугольнике ABC, с отрезком BO. Точка F – это точка касания окружностей, расположенных в треугольнике ADC, с отрезком DO. Также известно, что в параллелограмм ABCD можно вписать окружность.

Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте, то есть все развороты робота – танковые.

При расчетах примите $\pi \approx 3{,}14$. Приведите полное решение данной задачи.

А) (10 баллов) Определите, чему равна минимальная длина самопересекающейся линии, с помощью которой можно изобразить данную эмблему (см. *эмблема*). Ответ дайте в метрах.

Б) (10 баллов) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру (см. *эмблема*). Ответ дайте в секундах.

Решение:

ABCD – это параллелограмм, в который можно вписать окружность. Соответственно, можно доказать, что данный параллелограмм является ромбом.

Поскольку ABCD – ромб, то его диагонали пересекаются под прямым углом. Следовательно, четыре треугольника, на которые разбивается диагоналями ромб, являются прямоугольными.

Поскольку ABCD – ромб, то все его стороны равны.

Поскольку ABCD – параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Соответственно, четыре прямоугольника, треугольника, на которые разбивается ромб диагоналями, будут равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABO. Определим, чему равны его стороны:

$$\mathrm{BO} = \frac{1}{2} \times BD = \frac{8}{2} = 4 \text{ м}$$

$$\mathrm{AO} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AC} = \frac{6}{2} = 3 \text{ м}$$

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ м}$$

Рассчитаем, чему равен радиус вписанной в треугольник окружности:

$$r = \frac{1}{2} \times (a + b - c) = \frac{1}{2} \times (4 + 3 - 5) = 1 \text{ м}$$

Длина самопересекающейся кривой будет равна длине четырех окружностей и длине отрезка, равного длине двух радиусов:

$$L = 4 \times 2\pi r + 2r = 4 \times 2\pi + 2 = 25{,}12 + 2 = 27{,}12 \text{ м}$$

При изображении данной кривой робот может обойтись без танковых разворотов на месте.

Определим, за какое минимальное время робот начертит данную эмблему:

Рассчитаем путь, пройденным внешним колесом робота:

$$S = 4 * 2\pi\left(r + \frac{1}{2}l\right) + 2 = 4 * 2\pi * (1 + 0{,}2) + 2 \approx 32{,}14 \text{ м}$$

В данной формуле l – это величина колесной базы.

Рассчитаем длину окружности колеса:

$$L_{\text{колеса}} = 2\pi r_{\text{колеса}} = 2 \times 3{,}14 \times 0{,}1 = 0{,}628 \text{ м}$$

Минимальное время, за которое робот начертит данную фигуру:

$$t = \frac{S}{L_{\text{колеса}} * w} = \frac{32{,}144}{0{,}628 \times \frac{1}{4}} \approx 205 \text{ с}$$

Ответ:

А) ≈ 27,12 м

Б) ≈ 205 с