

**1. Обычные и «Ласточки» (7 баллов)**

На железнодорожной ветке, связывающей город M с областным центром T , есть (кроме прочих) остановки в городке $З$ и посёлке $П$. От M до $З$ проложены два пути для движения поездов в направлении T , а от $З$ до $П$ — один путь (см. рисунок). Расстояние от M до $З$ равно 45 км, а от $З$ до $П$ — 15 км. Начиная с 17:00 и до 21:00 от M в направлении T каждые пятнадцать минут отправляются скоростные электропоезда «Ласточка», которые останавливаются в $З$, но не останавливаются в $П$, а также хотя бы раз в час отправляются обычные электрички, останавливающиеся и в $З$, и в $П$. Ласточки движутся со средней скоростью 120 км/ч, а обычные электрички — со средней скоростью 45 км/ч. На пути от M до $З$ Ласточки и обычные электрички движутся по разным путям, не мешая друг другу. Электричка не отправляется из $З$, если на пути до $П$ её может догнать Ласточка, выжидая в $З$ удобного момента для отправления (так, чтобы можно было доехать до $П$, не мешая Ласточкам). Можно считать, что посадка, высадка и пересадка пассажиров с одного электропоезда на другой на остановках происходит за пренебрежимо малое время.



А. За какое минимальное время можно доехать до посёлка $П$ по железной дороге, отправившись из M в интервале времени от 18:00 до 19:00 включительно, в случае наиболее удобного для этого расписания электричек? (3 балла)

В. В какое время (часов, минут) в интервале от 18:00 до 18:30 включительно следует назначить отправление электричек от M , чтобы они приходили в $П$, не задерживаясь в $З$? Укажите все возможные значения. (4 балла)

2. Губка Менгера (10 баллов)

Ниже вы видите компьютерный рисунок из «Википедии» (автор: Niabot), на котором изображены первые итерации построения фрактала под названием «Губка Менгера». На первой итерации в кубе делают три сквозных отверстия квадратного сечения. Оси отверстий взаимно перпендикулярны, перпендикулярны граням куба и проходят через середины граней. Длина стороны квадрата, лежащего в сечении отверстия, равна $\frac{1}{3}$ длины стороны грани куба. На второй итерации подобные отверстия проделывают в маленьких кубиках, образовавшихся на гранях большого куба и так далее.

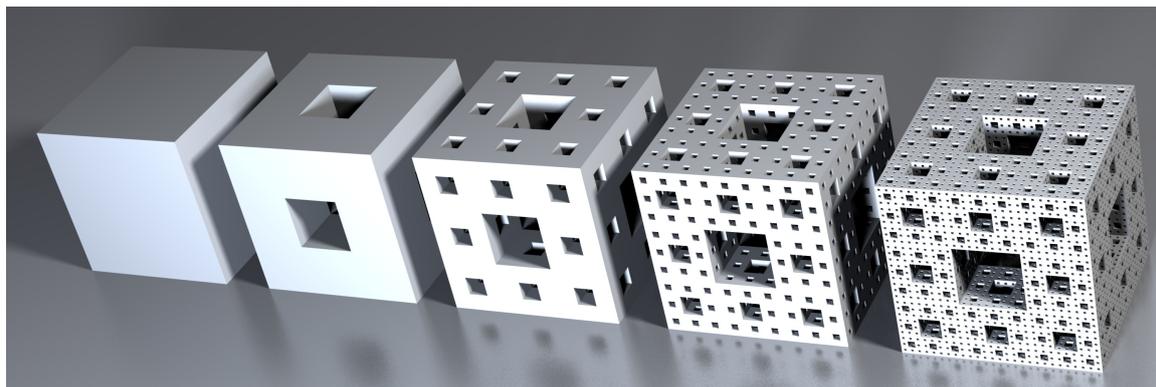
Пусть имеется заготовка в виде куба с длиной стороны 1 м, изготовленная из пластика плотностью 1000 кг/м³, а также устройство, при помощи которого можно делать в этой заготовке отверстия квадратного сечения сколь угодно малого размера. Из куба решили изготовить n -ую итерацию губки Менгера.

А. Чему равна средняя плотность куба на четвёртой итерации (последний кубик на рисунке)? (4 балла)

В. Представим себе, что образующиеся на n -ой итерации полости заполняют пластиком плотностью 2000 кг/м³. Чему может быть равна средняя плотность куба на n -ой ($n \geq 0$) итерации? В ответе укажите границы диапазона возможных значений плотности. (2 балла)

С. Нам не нравится, что губка белая. Решили покрасить все грани губки на второй итерации (в том числе все внутренние) синей краской, расход которой составляет 100 г/м². Хватит ли одной банки, содержащей 1 кг краски, для этого? А двух банок? (4 балла)

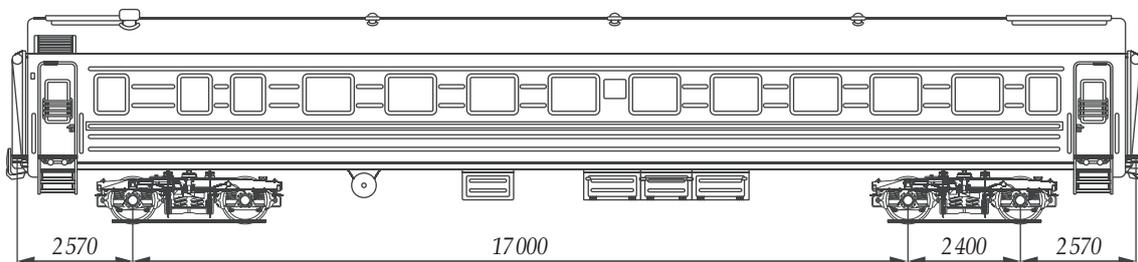
Продолжение задания на листе 2



К задаче 2. Исходный куб и первые четыре итерации губки Менгера

3. «Ты-дым, ты-дым» (8 баллов)

Путешествуя на поезде, можно обратить внимание на характерный периодически повторяющийся звук стука колёс, который в письменном виде можно передать примерно так: «Ты-дым, ты-дым». Ниже вы видите схематичный рисунок вагона поезда с указанием некоторых размеров, а также визуализацию короткого фрагмента записи этого звука, сделанной в вагоне поезда (мы не знаем, кто записал, поскольку позаимствовали этот звук на Youtube в видео под названием «8 часов сна под стук колёс» от автора Faktor Zet). Когда мы говорим «визуализация» — то имеем в виду зависимость амплитуды звуковых волн (проще говоря, громкости звука) от времени. Абсолютной тишине на графике соответствует линия, проведённая вдоль горизонтальной оси симметрии рисунка. Точки, лежащие на большом расстоянии по вертикали от этой линии, соответствуют громким звукам, а лежащие вблизи этой линии — тихим. На графике на фоне шума можно различить периодически повторяющиеся двойные пики громкости — это и есть описанные выше «ты-дым, ты-дым». Проанализируйте представленный график и определите как можно точнее скорость поезда и длину рельса.



К задаче 3. Пассажирский вагон. Размеры указаны в мм

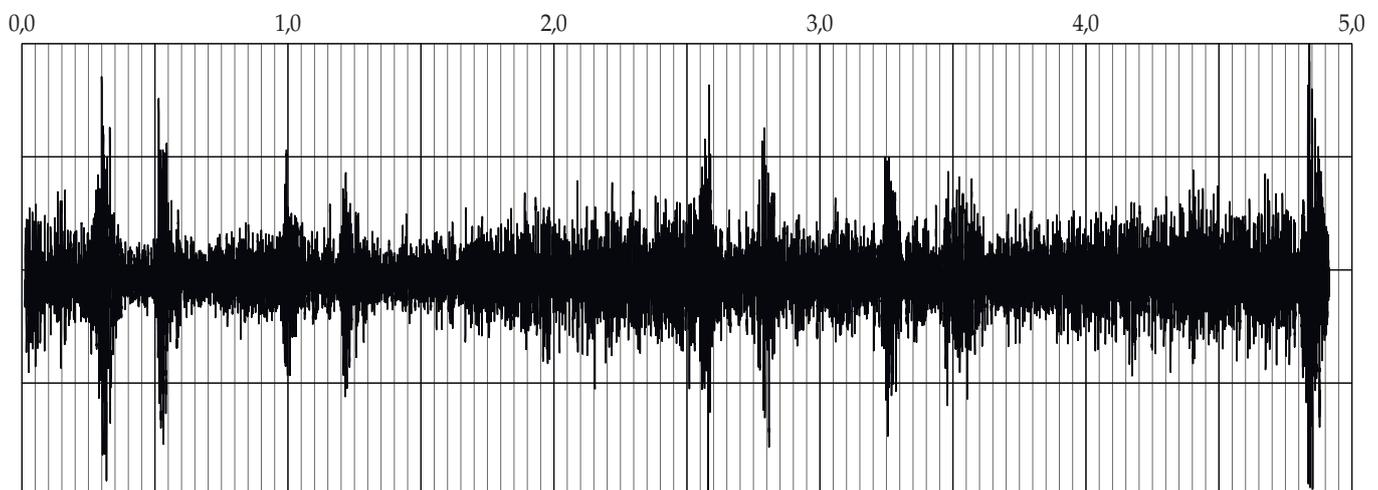
4. Погрешность плотности (7 баллов)

В распоряжении школьника имеются рычажные весы, предназначенные для измерения массы с точностью до 10 мг, три гири массой: 100 г, 20 г и 5 г, пластиковый кубик и линейка. Длины сторон кубика измерили линейкой и определили его объём, получилось значение $V = 100 \text{ см}^3 \pm 5 \text{ см}^3$. Считается, что чашечные весы, измеряющие массу с точностью 10 мг, уравновешены, если разность масс тел, находящихся на чашах, меньше 10 мг. Предполагается, что массы гирь определены с очень высокой точностью.

С помощью данного оборудования школьник определил среднюю плотность кубика с максимально возможной точностью, а после рассчитал относительную погрешность полученного результата. Какое наименьшее и наибольшее значение относительной погрешности он мог получить, если известно, что масса кубика точно больше 100 г, но меньше 125 г?

Указание. Если в результате измерений удалось определить, что измеряемая величина x лежит в пределах диапазона: $x_{\min} < x < x_{\max}$, то относительная погрешность измерения может быть оценена по формуле

$$\delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$$



К задаче 3. Запись звука стука колёс поезда. По горизонтальной шкале — время в секундах