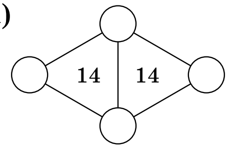
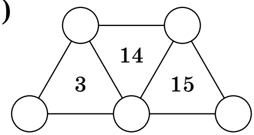
7 класс в Математической вертикали

Задача 1. На рисунке изображены два кодовых замка. Замок откроется, если вписать в кружочки различные цифры так, чтобы число внутри каждого из треугольников совпало или с суммой, или с произведением цифр в его вершинах. Какая комбинация из а) четырёх б) пяти различных цифр откроет замок?

а)



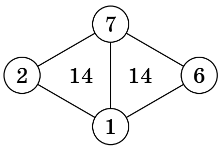
б)

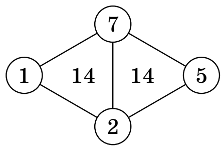


[*1 балл*] **[*3 балла*]**

(*В. А. Клепцын*)

Ответ. а) На рисунке приведены два возможных набора цифр, открывающих замок. В каждом из примеров можно верхнее число поменять местами с нижним, а правое с левым.





Комментарий. В обоих треугольниках стоит число 14. Цифры в кружочках не должны повторяться, при этом две из трёх цифр у этих треугольников общие, поэтому в одном из треугольников 14 должно означать сумму, а в другом — произведение. 14 в виде произведения можно представить только как $1 \cdot 2 \cdot 7$. Посмотрим, какие из этих цифр могут быть общими со вторым треугольником. Это не могут быть 1 и 2, так как никакая третья цифра не дотянет их сумму до 14. Значит, это либо 2 и 7, либо 1 и 7. В первом случае оставшееся число равно $14-(1+7)=6$, во втором $14-(2+7)=5$.

б) См. задачу 1 для 7 класса (с. 7).

Задача 2. См. задачу 2 для 6 класса в Математической вертикали (с. 11).

Задача 3. См. задачу 2 для 7 класса (с. 8).

Задача 4. На быстрой зарядке телефон полностью заряжается за 1 час 20 минут, а на обычной — за 4 часа. Федя поставил полностью разряженный телефон сначала на обычную зарядку, а потом, когда нашёл нужный блок, переставил на быструю до окончания зарядки. Найдите общее время зарядки телефона, если известно, что на быстрой зарядке телефон находился одну треть от общего времени зарядки. Считайте, что и при быстрой, и при обычной зарядке телефон заряжается равномерно. **[*6 баллов*]**

(*на основе задачи 7.3 Матпраздника 2007 года*)

Ответ. 144 минуты = 2 часа 24 минуты.

Решение. Так как быстрая зарядка длится 1 ч 20 мин, то есть 80 мин, то за 1 минуту быстрой зарядки телефон заряжается на $1/80$ от полного заряда. При обычной зарядке, которая длится 4 ч, то есть 240 мин, за 1 минуту телефон заряжается на $1/240$ от полного заряда.

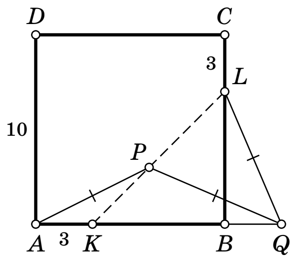
Обозначим общее время зарядки телефона в минутах через t. Тогда $t/3$ — время, которое шла быстрая зарядка, и $2t/3$ — время, которое шла обычная зарядка. За время быстрой зарядки телефон зарядился на $\frac{t}{3}\cdot\frac{1}{80}=\frac{t}{240}$ от полного заряда. За время обычной зарядки — на $\frac{2t}{3}\cdot\frac{1}{240}=\frac{t}{360}$ от полного заряда. Так как по окончании зарядки телефон оказался полностью заряженным, то можно составить уравнение $\frac{t}{240}+\frac{t}{360}=1$, решая которое, находим

$$t=\frac{1}{\frac{1}{240}+\frac{1}{360}}=\frac{1}{\frac{3}{720}+\frac{2}{720}}=\frac{720}{5}=144.$$

Задача 5. См. задачу 5 для 6 класса в математической вертикали (с. 15).

Решение. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

Задача 6. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ со стороной, равной 10, отмечены точки K и L соответственно так, что $AK = CL = 3$. На отрезке KL выбрали точку P, а на продолжении отрезка AB за точку B выбрали точку Q так, что $AP = PQ = QL$ (см. рис.).



а) Докажите, что $\angle PAB = \angle BLQ$. **[*4 балла*]**

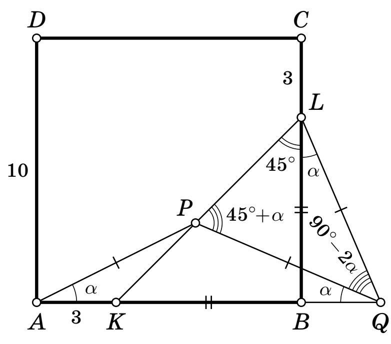
б) Найдите длину отрезка BQ. **[*4 балла*]**

* При решении пункта б) можно пользоваться утверждением пункта а). (*Ф. А. Ивлев, А. А. Марданов*)

а) **Решение.** Заметим, что $KB = AB - AK = 10 - 3 = BC - LC = BL$. Следовательно, треугольник KBL равнобедренный и прямоугольный, откуда $\angle KLB = 45^\circ$.

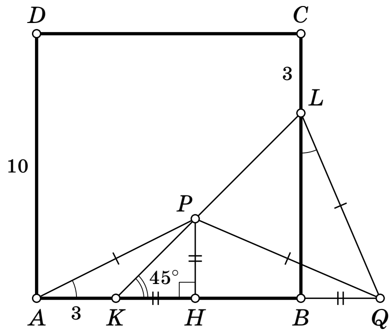
Обозначим угол BLQ через α. Так как треугольник PQL равнобедренный, получаем $\angle LPQ = \angle PLQ = 45^\circ + \alpha$. Из суммы углов треугольника PQL находим $\angle PQL = 180^\circ - 2 \cdot (45^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha$.

По сумме углов треугольника BLQ находим, что $\angle LQB = 90^\circ - \alpha$. Теперь находим $\angle PQA = \angle LQA - \angle LQP = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha$. Наконец, так как треугольник APQ равнобедренный, то $\angle PQA = \angle PAQ = \alpha = \angle BLQ$, что и требовалось доказать.



б) **Ответ.** $BQ = 4$.

Решение. Опустим из точки P высоту PH на сторону AB. Так как треугольник KBL равнобедренный и прямоугольный, то $\angle PKH = 45^\circ$. Следовательно, треугольник KPH тоже равнобедренный и $KH = HP$.



Заметим, что прямоугольные треугольники APH и LQB равны по гипотенузе ($AP = LQ$) и острому углу ($\angle PAH = \angle BLQ$). Следовательно, $KH = PH = BQ$.

Так как PH — высота в равнобедренном треугольнике APQ, проведённая к его основанию, то она же является и медианой. Тогда $AH = HQ$ и можно записать следующее соотношение:

$$AB + BQ = AQ = 2AH = 2(AK + KH) = 2(AK + BQ),$$
$$10 + BQ = 2(3 + BQ) = 6 + 2BQ,$$

откуда $BQ = 4$.