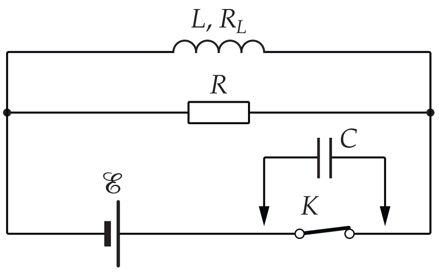
Условия задач, ответы и критерии оценивания

1. Явления при размыкании (6 баллов)

Крюков П. А.

В цепях с большой индуктивной нагрузкой ключ часто шунтируют конденсатором (подключают его параллельно ключу), подобно тому как это схематично показано на рисунке ниже. Предлагается рассмотреть две цепи, собранные по схеме, показанной на рисунке: в первой ключ зашунтирован, а во второй — нет. В обеих цепях изначально ключ замкнут, токи установились. Численные значения параметров цепей следующие: $\mathscr{E} = 10$ В, $R = 100$ Ом, $R_L = 10$ Ом (сопротивление провода, которым намотана катушка), $L = 0{,}1$ Гн, $C = 1$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



A. (*2 б.*) Определите отношение $\frac{U_1}{U_2}$ напряжений на резисторе сразу после размыкания ключа в первой и второй цепи.

B. (*4 б.*) Найдите количество теплоты Q_1, выделяющееся после размыкания ключа в первой цепи, и количество теплоты Q_2, которое выделяется на резисторе R после размыкания ключа во второй цепи.

Ответ: A) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_L}{R} = 0{,}1$; B) $Q_1 = \frac{L\mathscr{E}^2}{2R_L^2}\left(1 + \frac{CR_L^2}{L}\right) \approx$ $\approx 5 \cdot 10^{-2}$ Дж, $Q_2 = \frac{L\mathscr{E}^2}{2R_L^2} \cdot \frac{R}{R+R_L} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Оценка за ответ на любой вопрос не снижается, если получены верные числовые ответы, но не приведены ответы в общем виде.

Оценка за ответ на вопрос части А снижается до *1 балла*, если получен неверный числовой ответ, однако в общем виде ответ правильный или в решении есть верные выражения в общем виде для напряжений U_1 и U_2.

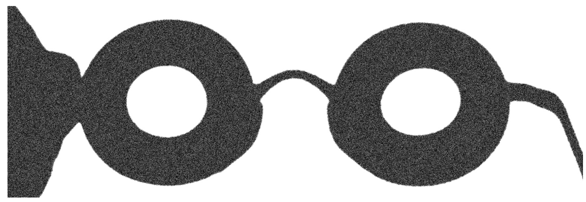
Часть B оценивается из расчёта *2 балла* за ответ на каждый из вопросов. При этом если числовой ответ для Q_1 или Q_2 оказался неправильным в силу вычислительных ошибок или из-за невнимательности, хотя решение с физической точки зрения абсолютно верное, то такой ответ на один из вопросов части B оценивается в *1 балл*.

Разумные соображения при отсутствии верных ответов (числовых или в общем виде) в части B (например, записан закон сохранения энергии, найдено суммарное количество теплоты во второй цепи) дают оценку *1 балл* за всю часть.

2. Очки составителя (7 баллов)

Крюков П. А.

Один из составителей заданий олимпиады носит очки в очень тонкой оправе, оптическая сила линз которых равна +2 дптр. Если эти очки снять с составителя и расположить их под светодиодной лампочкой, закреплённой на потолке комнаты, так, чтобы плоскости линз были параллельны полу, то на полу можно будет наблюдать резкую тень от оправы и линз, а также две ярко освещённые области в центрах теней линз (см. обработанный фрагмент фотографии ниже).



Считая лампочку точечным источником света, определите, на каком расстоянии от пола следует держать очки, чтобы диаметр светлого пятна в середине тени одной из линз был примерно в два раза меньше диаметра тени линзы. Высота потолка в комнате равна 3 м. Считайте, что линия, соединяющая лампочку и оптический центр линзы, перпендикулярна полу. Учтите, что искомое расстояние не должно быть больше 1 м.

Ответ: 27,5 см.

Критерии

Правильное, обоснованное решение задачи оценивается полным баллом. Оценка не снижается, если решение не содержит рисунок. Оценка не снижается, если получен правильный ответ, но решение не содержит анализа различных случаев расположения линзы. Если решение правильное с физической точки зрения, но верный ответ не получен вследствие вычислительных ошибок, то такое решение оценивается в *5 баллов*.

Если решение неправильное, или частично правильное, то отдельные его составляющие оцениваются так.

Есть рисунок, поясняющий образование светлого пятна в центре тени линзы, или объяснение эффекта дано словами — *1 балл.*

Получена формула $D_1 = D\frac{3}{3-x}$, дающая диаметр тени линзы, или аналогичная — *1 балл.*

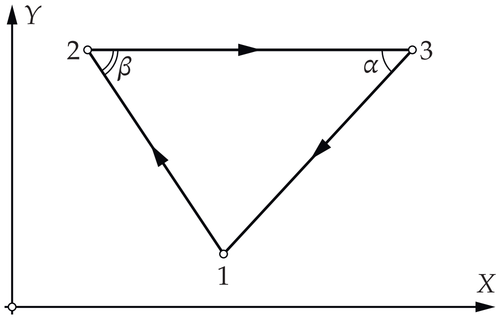
Получена формула для расстояния до изображения источника $y = \frac{3-x}{5-2x}$ или аналогичная — *1 балл.*

Получена формула, дающая диаметр светлого пятна $D_2 = \pm D \cdot \frac{y-x}{y}$, или аналогичная — *1 балл.*

3. Расчёт цикла (8 баллов)

Крюков П. А.

С одним молем идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме c_V равна $2R$, где R — универсальная газовая постоянная, проводится циклический процесс 1231, график которого в логарифмических координатах ($x = \ln \frac{V}{V_0}$, $y = \ln \frac{p}{p_0}$, где p_0 и V_0 — некоторые неизвестные постоянные) имеет форму треугольника с углами $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$ (см. рисунок ниже). Отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе равно n.



A. (*4 б.*) Считая известной температуру T_1 в точке 1, найдите температуры T_2 и T_3 в точках 2 и 3.

B. (*4 б.*) Определите КПД η цикла.

<u>Ответ</u>: А) $T_2 = T_1 n^{\frac{1}{3}}$, $T_3 = T_1 n^2$; B) $\eta = 1 - \frac{5(n^2-1)}{6(n^2-n^{\frac{1}{3}})}$.

Критерии

Внимание! В этой задаче критерии были незначительно изменены в процессе проверки решений по сравнению с заявленными в условии (*4 балла* за вопросы части А и *4 балла* за вопрос части В).

Верные, обоснованные ответы на все вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Промежуточные результаты, полученные в процессе решения оцениваются следующим образом.

Указывается, что процесс 12 адиабатический (вне зависимости от способа, которым получен этот результат) — *2 балла*.

Сделан вывод о том, что в процессе 31 давление прямо пропорционально объёму — *2 балла*.

Верно найдена температура T_1 — *1 балл.*

Верно найдена температура T_2 — *1 балл.*

Решение содержит формулу для КПД цикла $\eta = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{23}}$ или аналогичную — *1 балл.*

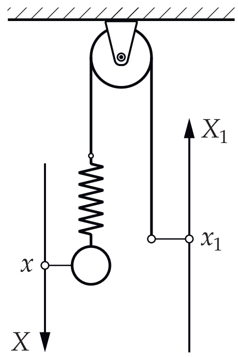
Верно определён КПД цикла η — *1 балл.*

Баллы, полученные за промежуточные результаты, суммируются.

4. Вынуждают колебаться! (10 баллов)

Фольклор

К одному концу невесомой нити, перекинутой через идеальный блок, присоединён пружинный маятник, состоящий из лёгкой пружины с тяжёлым шариком. Собственная частота колебаний маятника (в отсутствие затухания) равна ω_0. На другой конец нити действует такая внешняя сила, что начиная с нулевого момента времени его координата по вертикали меняется по закону $x_1(t) = A\sin(\Omega t)$ (см. рисунок). В нулевой момент времени маятник находится в положении равновесия и не движется. В обеих частях задачи считается, что нить при колебаниях ни в один из моментов времени не провисает. Шарик движется только по вертикали и не раскачивается.



A. (*4 б.*) В этой части предлагается пренебречь всеми силами сопротивления. Тогда движение шарика будет представлять собой суперпозицию колебаний с частотами Ω и ω_0:

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t + \varphi) + C_2 \sin(\Omega t),$$

где $x(t)$ — отклонение шарика от положения равновесия (см. рисунок), C_1, C_2, φ — неизвестные постоянные. Определите максимально возможное отклонение шарика от положения равновесия в следующих случаях:

A1) (*2 б.*) $\Omega \gg \omega_0$; A2) (*2 б.*) $\Omega \ll \omega_0$.

B. (*6 б.*) В этой части предлагается учесть слабое затухание колебаний маятника. Предположим, что затухание обусловлено силой, пропорциональной скорости шарика и направленной против скорости. Тогда через некоторое время после начала процесса координата шарика будет изменяться периодически по гармоническому закону с частотой Ω. Однако колебания шарика будут сдвинуты по фазе относительно колебаний конца нити, к которому прикладывается внешняя сила, на φ:

$$x(t) = C \sin(\Omega t + \varphi).$$

Определите абсолютное значение сдвига фаз φ при следующих значениях частоты Ω:

B1) (*4 б.*) $\Omega \gg \omega_0$, $\Omega \ll \omega_0$; B2) (*2 б.*) $\Omega = \omega_0$.

<u>Ответ</u>: A1) $x_{\max} = A \cdot \frac{\omega_0}{\Omega} \approx 0$ при $\Omega \gg \omega_0$; A2) $x_{\max} = A\left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right) \approx A$ при $\Omega \ll \omega_0$. B1) π и 0; B2) $\frac{\pi}{2}$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

В части А считаются верными ответы, полученные и в нулевом приближении, и в линейном по малому параметру приближении. Если предельный переход, соответствующий сильным неравенствам в условии, не сделан, а дана только верная общая формула для двух случаев, то такой ответ оценивается суммарно в *3,5 балла*.

Если в части А получены неверные ответы, но есть отдельные верные утверждения, то они оцениваются по следующей схеме. Получено уравнение колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{kA}{m}\sin(\Omega t),$$

или аналогичное — *1 балл*. Получена амплитуда составляющей, колеблющейся с частотой Ω:

$$C_2 = A \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

с точностью до знака — *1 балл*. Если участник пытается рассуждать качественно и высказывает мысль о том, что в случае $\Omega \gg \omega_0$ периодическое движение конца нити не передаётся грузу — *1 балл*. Аналогично в случае $\Omega \ll \omega_0$ утверждение о том, что пружина эквивалентна нерастяжимой нити — *1 балл*. При этом оцениваются либо качественные рассуждения, либо полученные формулы.

В части *B* каждый из верных ответов оценивается в *2 балла* вне зависимости от того, каким образом он получен. Если в части B получены ответы, выраженные через неизвестный коэффициент затухания γ, то такие ответы оцениваются в *1 балл* за каждый.

Если в части *B* верные ответы не получены, но есть отдельные верные рассуждения, то они оцениваются по следующей схеме. Получено уравнение колебаний

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\omega_0^2 \sin(\Omega t)$$

— *1 балл*. Предложено использовать электромеханическую аналогию, изображена векторная диаграмма (или диаграмма нарисована для амплитуд механических величин) — *2 балла*. Если вместо векторной диаграммы делается попытка оценить слагаемые в дифференциальном уравнении, приводящая к неверным выводам вследствие вычислительных ошибок, — *2 балла*.

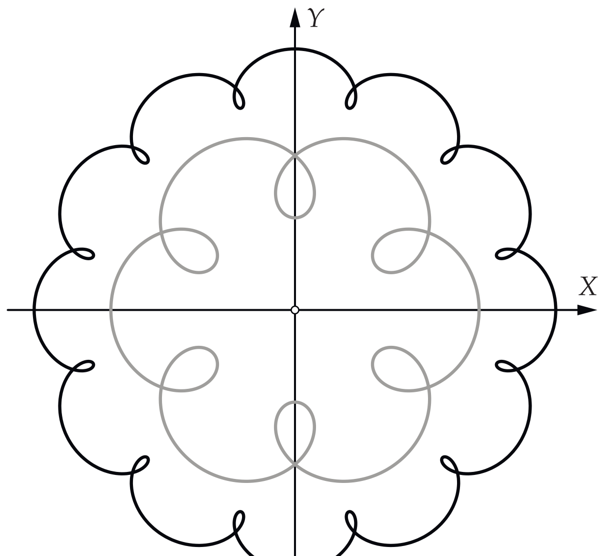
5. Ловушка Пеннинга (14 баллов)

Ромашка М. Ю.

Ловушкой Пеннинга называется один из типов ионных ловушек — устройств, используемых в экспериментах по ядерной физике для удержания заряженных частиц и ядер в некоторой ограниченной области пространства в течение длительного (по меркам микромира) времени. В этой ловушке мощным электромагнитом создаётся однородное магнитное поле B, которое можно считать направленным против оси OZ системы координат с началом в центре ловушки ($B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = -B$), кроме того, системой металлических электродов создаётся электрическое поле с потенциалом

$$\varphi(x,y,z) = \frac{U_0}{2r_0^2}\left(-a(x^2+y^2) + bz^2\right),$$

где U_0 и r_0 — известные постоянные, a и b — неизвестные безразмерные константы, причём $a > 0$. Оказывается, в полях такого вида положительно заряженная частица движется сложным образом. Вдоль оси OZ частица совершает гармонические колебания с некоторой частотой Ω_z около начала координат. Проекция траектории частицы на плоскость XOY представляет собой *эпитрохоиду*. Это линия, которую описывает точка, движущаяся по окружности радиуса r с постоянной угловой скоростью $\omega^{(+)}$, при том что центр этой окружности движется по окружности бо́льшего радиуса R ($R > r$) с меньшей угловой скоростью $\omega^{(-)}$. Здесь и далее имеются в виду угловые скорости относительно лабораторной (!) системы отсчёта. Примеры эпитрохоид, для которых центр большей окружности находится в начале координат, можно видеть на рисунке ниже.



Далее везде речь идёт о движении частицы с известными массой m и положительным зарядом q. Параметры U_0, r_0 и B также считаются известными во всех частях задачи, кроме части C.

A. (*4 б.*) Получите формулы для проекций E_x, E_y и E_z вектора напряжённости электрического поля на оси системы координат и найдите отношение $\frac{b}{a}$

безразмерных коэффициентов b и a в выражении для потенциала электростатического поля.

Внимание! Если вы не получили в части A отношение $\frac{b}{a}$, можете приступить к решению части C, считая это отношение известным параметром.

B. (*2 б.*) Пусть задан коэффициент b. Определите частоту колебаний Ω_z, а также циклотронную частоту Ω_0 вращения частицы в магнитном поле при отсутствии электрического.

C. (*6 б.*) Выразите угловые скорости вращения частицы $\omega^{(+)}$ и $\omega^{(-)}$ по окружностям, дающим траекторию в виде эпитрохоиды, через параметры Ω_z и Ω_0 ($\sqrt{2}\Omega_z < \Omega_0$); $\omega^{(+)}$ — угловая скорость движения по окружности радиусом r, $\omega^{(-)}$ — угловая скорость вращения центра этой окружности. Радиусы окружностей r и R неизвестны. На рисунке выше ось OZ направлена на читателя, движение по обеим окружностям происходит в направлении против часовой стрелки.

D. (*2 б.*) Для траектории в виде бо́льшей эпитрохоиды на рисунке выше (линия чёрного цвета), используя результаты предыдущих частей, определите безразмерные коэффициенты a и b в выражении для потенциала электростатического поля.

Ответ: A) $E_x = \frac{aU_0x}{r_0^2}$, $E_y = \frac{aU_0y}{r_0^2}$, $E_z = -\frac{bU_0z}{r_0^2}$; $\frac{b}{a} = 2$. B) $\Omega_z = \sqrt{\frac{qbU_0}{mr_0^2}}$, $\Omega_0 = \frac{qB}{m}$. C) $\omega^{(\pm)} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}$. D) $b = 2a = \frac{13}{98} \cdot \frac{qB^2r_0^2}{mU_0}$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Во всех частях задачи правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверным ответам вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 50 % от максимального количества баллов за соответствующий ответ.

Верные ответы оцениваются полным баллом вне зависимости от того, как они получены.

В части A формулы для компонент напряжённости оцениваются в *1 балл*. Соотношение, связывающее параметры a и b, — *3 балла*.

В части B верный ответ для каждой из частот оценивается в *1 балл*.

В части C верные ответы для угловых скоростей (даже если они выражены через неизвестное отношение $\frac{b}{a}$) оцениваются полным баллом. Если ответы не получены, но решение содержит отдельные верные рассуждения или утверждения, то они оцениваются по следующей схеме. В том или ином виде верно записано уравнение движения частицы — *1 балл*. Сделана попытка использовать тот факт, что траектория движения задана (тем или иным образом) — *1 балл*.

Если при ответе на вопросы части D неверно определено отношение угловых скоростей по рисунку при том, что всё остальное сделано верно, то за такое решение выставляется оценка *0,5 балла* за всю часть.