МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

11 КЛАСС

1 вариант

Задание 1

Решите уравнение:

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2x}+5\cdot 3^{2-x}-14}{49-7^{x}}=0.$$

Решение: Числитель можно приравнять к нулю, при этом знаменатель в ноль обращаться не должен. Таким образом получим два возможных корня – 2 и $\log_3 5$. Первый корень обращает знаменатель в ноль.

Ответ: $\log_3 5$.

Задание 2

Имеет ли система $\begin{cases}\sin x+a=bx\\ \cos x=b\end{cases}$ хотя бы одно решение, если a и b такие, что первое уравнение системы имеет ровно два решения.

Решение: рассмотреть функцию $y = \sin x + a - bx$ и точки, в которых она обращается в ноль. С помощью теоремы о промежуточном значении показать, что функция не меняет свой знак на интервалах, на которые разбивают числовую ось нулевые значения функции y. Показать, что $b \neq 0$ (в противном случае, функция y обращалась бы в ноль на бесконечном количестве точек). Определить знаки, которые принимает функция y на интервалах разбиения числовой оси собственными нулями. Показать, что одна из точек разбиения есть точка экстремума и связать этот факт с тем, что второе уравнение указанной системы есть производная y'.

Ответ: Да, имеет.

Задание 3

$SABC$ — правильная треугольная пирамида с вершиной S. Пусть сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между ребром SC и высотой основания AA_1.

Решение: Построить A_1M параллельно SC, показать, что угол между AA_1 и SC равен углу между AA_1 и A_1M. Определить, что $A_1M = 1$, поскольку A_1M — средняя линия. Рассчитать AA_1 по теореме Пифагора, найти AM по формуле медианы. Найти искомое значение косинуса в треугольнике AA_1M по теореме косинусов.

Ответ*:* 0,25.

Задание 4

При каких значениях параметра a, система $\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|} \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$ будет иметь ровно четыре решения?

Решение*:* Сделать замену $u = \sqrt{5|x|}$ и $v = \sqrt{|y+3|}$. Получить систему $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 16a \end{cases}$, показать, что если хотя бы одна из переменных u, v отрицательна, то исходная система не имеет решений.

Ответ*:* 1/128; 1/16.

Задание 5

В турнире играют m учеников школы №1 и d учащихся школы №2, причём каждый играет с каждым дважды. За победу начисляется одно очко, за ничью – половина, проигрыш очков не приносит.

1. Найти наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать школьники из второй школы, если $m = 3$, $d = 2$
2. Найти сумму набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.

3. Определить все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме ученики из первой школы набрали ровно в 3 раза больше очков, чем ученики из второй.

Решение:

1. Всего школьники из второй школы играют 2 партии между собой и 12 партий против участников из первой (по 6 каждая). Поэтому максимальное суммарное число очков, которые они могут набрать, равно 2+12=14.
2. Если участников всего 10, то каждый играет с 9-ю другими участниками по два раза, значит, всего происходит 18 туров по 5 партий в каждом. В 90 партиях разыгрывается 90 очков, поэтому ответ – 90.

3. Всего детей — $8d$. Играя по две партии каждый с каждым, они сыграли между собой $8d(8d-1)$ партий и разыграли $16d^2 - 2d$ очков. Тогда можно показать, что максимальное количество очков, которые могли набрать школьники из второй школы, равно $14d^2 + d(d-1)$. Отсюда следует, что их не могло быть больше одного.

Ответ: 1) 14; 2) 90; 3) 1.

Задание 6

Дана последовательность чисел, в которой первый член $a_1 = 47$, а каждый последующий равен произведению a_1 и суммы цифр предыдущего члена.

1. Найти пятый член последовательности.
2. Найдите 50-й член последовательности.
3. Вычислите сумму первых пятидесяти членов этой последовательности.

Решение: Вычислим несколько первых членов последовательности:

47, 517, 611, 376, 752, 658, 893, 940, 611, ...

Дальше последовательность

611, 376, 752, 658, 893, 940

будет все время повторяться. В частности, если повторить ее 8 раз, вместе с двумя первыми членами будет ровно 50 членов.

Ответ*:* 1) 752; 2) 940; 3) 34404

11 КЛАСС

2 вариант

Задание 1

Решите уравнение: $\dfrac{5^x}{2^{x-1}-5^x}=8-\dfrac{2^{x+1}}{5^x}$.

Ответ: $\log_{2/5}3$.

Задание 2

Имеет ли система $\begin{cases}\cos x = ax+b\\ \sin x + a = 0\end{cases}$ хотя бы одно решение, если a и b такие, что первое уравнение системы имеет ровно два решения.

Решение: рассмотреть функцию $y = \cos x - ax - b$ и точки, в которых она обращается в ноль. С помощью теоремы о промежуточном значении показать, что функция не меняет свой знак на интервалах, на которые разбивают числовую ось нулевые значения функции y. Показать, что $b \neq 0$ (в противном случае функция y обращалась бы в ноль на бесконечном количестве точек). Определить знаки, которые принимает функция y на интервалах разбиения числовой оси собственными нулями. Показать, что одна из точек разбиения есть точка экстремума и связать этот факт с тем, что второе уравнение указанной системы есть производная y'.

Ответ: Да, имеет.

Задание 3

$SABC$ — правильная треугольная пирамида с вершиной S. Пусть сторона основания равна $\sqrt{5}$, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между ребром SC и высотой основания AA_1.

Решение: Построить A_1M параллельно SC, показать, что угол между AA_1 и SC равен углу между AA_1 и A_1M. Определить, что $A_1M = 1$, поскольку A_1M — средняя линия. Рассчитать AA_1 по теореме Пифагора, найти AM по формуле медианы. Найти искомое значение косинуса в треугольнике AA_1M по теореме косинусов.

Ответ: 15/144.

Задание 4

Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a\left(y^4+3\right)=x+3\left(1-|y|\right) \\ |x|+|y|=3 \end{cases}$ имеет только одно решение.

Решение*:* Система не меняется при замене знака переменной y. Поэтому, поскольку система должна иметь единственное решение, это решение должно иметь вид (x; 0). Далее необходимо найти такие a, при которых система будет иметь решения (x; 0).

Ответ*:* $a = 2$.

Задание 5

В турнире играют m учеников школы №1 и d учащихся школы №2, причём каждый играет с каждым дважды. За победу начисляется одно очко, за ничью – половина, проигрыш очков не приносит.

1. Найти наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать школьники из второй школы, если $m = 2$, $d = 2$
2. Найти сумму набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.
3. Определить все возможные значения d, если известно, что в сумме ученики из первой школы набрали ровно в 3 раза больше очков, чем ученики из второй.

Решение*:*

1. Ученики из второй школы играют 8 партий против команды из первой (каждый по 4), и максимальное число очков, которое они могут набрать в них, это 8. Друг с другом они играют 2 партии, сумма очков, которые разыгрываются в этих партиях, равна 2. Поэтому наибольшее количество очков равно 10

2. Если каждый играет с каждым по два раза, то состоится 18 туров, в каждом из которых играется по 5 партий. В каждой разыгрывается 1 очко, поэтому сумма всех набранных очков равна 90.

3. Рассмотреть случай, когда учеников поровну, а участники из второй школы набрали $d/2$ очков. Тогда можно показать, что общее число очков, набранное учениками из второй школы равно $d(d - 1/2)$, а из первой — $3d(d - 1/2)$

Ответ*:* 1) 10; 2) 90; 3) все натуральные числа.

Задание 6

Ряд цифр начинается с 1 9 7 5… Каждая последующая цифра задается последней цифрой суммы предыдущих четырех. Так, пятой цифрой будет 2 (1+9+7+5=22).

Встретится ли в этой последовательности:

1. набор цифр 1 2 3 4; 3 2 6 9;
2. вторично набор 1 9 7 5;
3. набор 8 1 9 7?

Решение*:*

1) Изначально все цифры нечётны, поэтому следующая цифра будет чётна. А после нее снова будут четыре нечётные цифры — каждая получается,

как сумма одной чётной и трех нечётных. Последовательности 1234 и 3269 содержат по две чётных цифры на четырёх местах.

2), 3): Да. Заметим, что зная четыре цифры, можно однозначно восстановить цифру перед этой четвёркой.

Всего четвёрок цифр конечное число, поэтому когда-то одна из них повторится. Возьмем первый момент, когда это случилось. Восстановим у обеих четвёрок цифру перед ними. Они будут одинаковыми, поэтому можно отступить на одну позицию назад и найти повтор раньше.

Единственное исключение — если из одной четверки отступать некуда, то есть это первая четверка. Значит, 1975 когда-нибудь повторится. Отступив от него на шаг назад, получим 8197.

Ответ*:* 1) нет; 2) да; 3) да.