11 класс, второй день

1. Дана строго возрастающая функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f\big(n + f(m)\big) = f(n) + m + 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$.

(*Т.А. Гарманова*)

Решение. 1) Подставляя $m = 0$, $n = 0$, получим $f(f(0)) = f(0) + 1$.

Если $f(0) = 0$, то получим $f(0) = f(0) + 1$, что невозможно.

2) Пусть $f(0) = a$, тогда $a \in \mathbb{N}$. Из первого пункта получаем, что $f(a) = a + 1$. Если подставить $m = 0$, $n = a$, то получим, что $f(2a) = f(a) + 1 = a + 2$. Поэтому значения функции на концах отрезка $[a; 2a]$ являются двумя последовательными натуральными числами. По условию функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ строго возрастает, а значит, на отрезке $[a; 2a]$ не должно быть других целых точек помимо a и $2a$, так как в противном случае, значения в этих точках совпадали бы с $a+1$ или $a+2$, что противоречило бы строгому возрастанию. $2a - a = 1$, т. е. $a = 1$.

Подставляя в исходное соотношение $m = 0$ и учитывая равенство $f(0) = 1$, получаем $f(n+1) = f(n) + 1$. Таким образом, $f(n) = n + 1$, следовательно, $f(2023) = 2024$.

2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

(*М.А. Евдокимов*)

Решение. Приведём пример шести целых чисел, удовлетворяющих условию: $-8, -2, 1, 4, 10, 16$. Числа $1, -2, 4, -8, 16$ образуют геометрическую прогрессию, а числа $-8, -2, 4, 10, 16$ — арифметическую прогрессию.

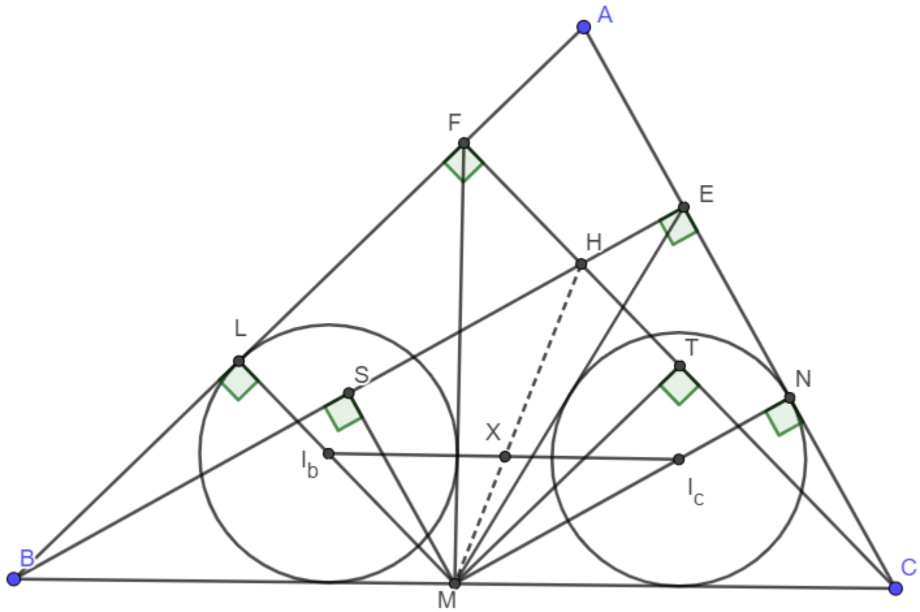
Покажем, что никакие пять различных целых чисел не удовлетворяют условию задачи. Предположим противное: пусть найдутся пять целых чисел, одновременно образующих геометрическую прогрессию и, возможно, в другом порядке, арифметическую прогрессию. Тогда они имеют вид b, bq, bq^2, bq^3, bq^4 где $b \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $b \neq 0$ и $q \neq 0$ по определению геометрической прогрессии. Числа b, bq^2, bq^4 всегда одного знака и в арифметической прогрессии идут либо подряд при $q < 0$, либо через одного при $q > 0$. В любом случае должно выполнятся равенство $2bq^2 = b + bq^4$, т. е. $b(q^2 - 1)^2 = 0$, откуда $q = \pm 1$, но тогда среди чисел есть равные. Противоречие. Следовательно, пяти чисел недостаточно.

Ответ: 6.

3. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H, точка M — середина стороны BC, а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.

(*И.Н. Михайлов*)

Решение.



Способ 1. Пусть S, T — середины высот BE и CF, а L, N — середины отрезков BF и CE. Обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF, CME, через ω_1, ω_2, а их центры — через I_b и I_c соответственно. Треугольники BMF и CME — равнобедренные, поэтому точки I_b и I_c лежат на соответствующих высотах ML и MN этих треугольников. Отрезки BI_b и CI_c являются биссектрисами треугольников MLB и MNC, поэтому, записывая для них основное свойство биссектрисы, получаем соотношения: $\dfrac{MI_c}{NI_c} = \dfrac{MC}{NC}$, $\dfrac{MI_b}{LI_b} = \dfrac{MB}{LB}$. Разделив первое на второе и учитывая равенство $MB = MC$, получаем, что $\dfrac{MI_c}{MI_b} \cdot \dfrac{LI_b}{NI_c} = \dfrac{LB}{NC}$. Поскольку X — центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2, то X лежит на линии центров I_bI_c и верно равенство: $\dfrac{LI_b}{NI_c} = \dfrac{XI_b}{XI_c}$. Но тогда $\dfrac{MI_c}{MI_b} \cdot \dfrac{LI_b}{NI_c} = \dfrac{MI_c}{MI_b} \cdot \dfrac{XI_b}{XI_c} = \dfrac{MI_c}{MI_b} \cdot \dfrac{S_{MXI_b}}{S_{MXI_c}} = \dfrac{\rho(X,\, MI_b)}{\rho(X,\, MI_c)}$, где $\rho(X,\, AB)$ обозначает расстояние от точки X до прямой AB. С другой стороны, по свойству средней линии $MS \parallel AC$ и $MT \parallel AB$, то есть $MS \perp BE$ и $MT \perp CF$. Значит, $MLFT$ и $MNES$ — прямоугольники, то есть $MT = LF$ и $MS = NE$. Тогда выполнены равенства $\dfrac{LB}{NC} = \dfrac{LF}{NE} = \dfrac{MT}{MS} = \dfrac{\rho(H,\, ML)}{\rho(H,\, MN)}$, где последнее равенство выполнено, поскольку MS и MT есть в точности общие перпендикуляры к парам параллельных прямых $BE \parallel MN$ и $CF \parallel ML$. Собирая все доказанные равенства вместе, получаем, что $\dfrac{\rho(H,\, ML)}{\rho(H,\, MN)} = \dfrac{LB}{NC} = \dfrac{MI_c}{MI_b} \cdot \dfrac{LI_b}{NI_c} = \dfrac{\rho(X,\, MI_b)}{\rho(X,\, MI_c)}$, откуда немедленно следует, что точки M, X и H лежат на одной прямой.

Способ 2. Как и в первом решении обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF и CME, через ω_1, ω_2, их центры через I_b и I_c соответственно, а середины отрезков BF и CE — через L и N. Пусть также Y — точка пересечения внешних касательных к ω_1, ω_2. Заметим, что четвёрка точек $(I_b,\, I_c,\, X,\, Y)$ — гармоническая, то есть двойное отношение $(I_b,\, I_c;\, X,\, Y)$ равно -1. Спроецируем эту четвёрку точек на прямую BE с центром в точке M. Точка Y лежит на прямой AC, поскольку эта прямая является одной из внешних касательных к ω_1 и ω_2, поэтому Y перейдёт в B. Точка I_b перейдёт в точку R пересечения прямых ML и BH, которая является серединой BH, поскольку в треугольнике BFC отрезок ML — средняя линия. Точка I_c перейдёт в бесконечно удалённую точку прямой BH, поскольку $MI_c \parallel BH$. Но при центральной проекции сохраняется двойное отношение четвёрки точек, а четвёрка $(R,\, \infty;\, H,\, B)$ — гармоническая. Значит, образом точки X при данной проекции является точка H, что и требовалось доказать.

4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $\ldots$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

(*М.А. Евдокимов*)

Решение. Сначала покажем, что в данном наборе есть тройки гирь, одна из которых уравновешивает две другие. Все веса не превосходят $\pi/4$, поэтому равенство $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} + \operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right)$ равносильно равенству $\operatorname{arctg}\frac{1}{n} + \operatorname{arctg}\frac{1}{m} = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}$.

Воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$, получаем

$$\frac{n+m}{nm-1} = \frac{1}{k},$$

т. е. $nm - k(n+m) = 1$. Добавив в этом равенстве к обеим частям k^2 и разложив на множители, получим $(n-k)(m-k) = k^2 + 1$. Выбирая теперь различные натуральные k и раскладывая k^2+1 на множители, находим подходящие тройки, в которых каждое число не превосходит 50. Результат для $k \leqslant 5$ и $n < m$ представлен в следующей таблице:

k	1	2	3	4	5
(n,m)	$(2,3)$	$(3,7)$	$(4,13)$ $(5,8)$	$(5,21)$	$(6,31)$ $(7,18)$

Теперь покажем, как разложить гири по чашам:

1-я чаша		2-я чаша
1	$=$	$2,3$
$5,21$	$=$	4
$6,31$	$=$	$7,18$

(в таблице указано значение n для гири весом $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$).

Таким образом нам удалось выбрать 10 гирь и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

5. В выпуклом многограннике обозначим через В, Р и Т соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $\mathrm{В}\sqrt{\mathrm{Р}+\mathrm{Т}} \geqslant 2\mathrm{Р}$.

Например, для тетраэдра ($\mathrm{В} = 4$, $\mathrm{Р} = 6$, $\mathrm{Т} = 3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы ($\mathrm{В} = 6$, $\mathrm{Р} = 9$, $\mathrm{Т} = 1$) или куба ($\mathrm{В} = 8$, $\mathrm{Р} = 12$, $\mathrm{Т} = 0$) имеет место строгое неравенство.

(*О.Н. Косухин*)

Решение. Степенью вершины многогранника называется количество исходящих из неё рёбер этого многогранника. Вершины называются *смежными*, если они соединены ребром.

Пусть A — произвольная вершина многогранника, k — её степень, m_j — степени всех смежных с ней вершин ($j = 1, 2, \ldots, k$), занумерованных в произвольном порядке. Тогда $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ — это количество всех рёбер, исходящих из смежных с A вершин, учтённых один или два раза, причём дважды учтены те и только те рёбра, которые лежат против вершины A в некоторой треугольной грани многогранника. Значит, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k \leqslant \mathrm{Р} + \mathrm{Т}$. Отсюда, используя известное неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим, получаем

$$\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \ldots + \sqrt{m_k}}{k} \leqslant \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{k}} \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{Р}+\mathrm{Т}}}{\sqrt{k}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} + \sqrt{\frac{m_2}{k}} + \ldots + \sqrt{\frac{m_k}{k}} \leqslant \sqrt{\mathrm{Р}+\mathrm{Т}}.$$

Обозначим сумму в левой части последнего неравенства через $S(A)$.

Пусть A_i ($i = 1, 2, \ldots, \mathrm{В}$) — все вершины многогранника, занумерованные в произвольном порядке, а n_i ($i = 1, 2, \ldots, \mathrm{В}$) — их соответственные степени. Для любой пары смежных вершин A_i и A_j по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{n_j}{n_i}} + \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} \geqslant 2.$$

Складывая эти неравенства по всем неупорядоченным парам $\{A_i, A_j\}$ смежных вершин многогранника, получаем

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{В}} S(A_i) \geqslant 2\mathrm{Р}.$$

По доказанному выше неравенству $S(A) \leqslant \sqrt{\mathrm{Р}+\mathrm{Т}}$ отсюда следует требуемая оценка.