

LXXVIII Московская астрономическая олимпиада (2024 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

8 класс

Задача 1

В начале XIX века существовало предположение, что Солнце светит за счёт того, что его жители сжигают уголь. Предположим, что каждый житель Солнца в течении суток может забрасывать в печи 1 тонну угля. Сколько жителей живёт на Солнце? Какова плотность населения (жителей на м^2)? Удельная теплота сгорания угля $q = 31 \text{ МДж/кг}$.

Решение. Светимость Солнца, то есть энергию, которую Солнце излучает за секунду, $L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$, можно найти в справочных данных. За сутки, то есть $t = 60 \cdot 60 \cdot 24 = 86\,400 \text{ с}$, Солнце выделяет энергию $E = L_{\odot}t \approx 3.3 \cdot 10^{31} \text{ Дж} = 3.3 \cdot 10^{25} \text{ МДж}$. Сжигая уголь, каждый житель вырабатывает за сутки $\varepsilon = q \cdot 1000 \text{ кг} = 3.1 \cdot 10^4 \text{ МДж}$ энергии. Таким образом, общее число жителей Солнца составляет

$$N = \frac{E}{\varepsilon} = \frac{3.3 \cdot 10^{25}}{3.1 \cdot 10^4} \approx 10^{21}.$$

Площадь «поверхности» Солнца равна $S_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ км}^2 = 6 \cdot 10^{18} \text{ м}^2$. Здесь мы использовали $R_{\odot} = 696\,000 \text{ км}$ — радиус Солнца из справочных данных. Тогда плотность населения на Солнце составляет

$$\frac{10^{21}}{6 \cdot 10^{18}} \approx 170$$

жителя на квадратный метр. Тесновато у них на Солнце.

Критерии проверки

- | | |
|---|---------|
| 1. Энергия, выделяемая Солнцем за сутки | 1 балл |
| 2. Энергия, вырабатываемая одним жителем за сутки | 1 балл |
| 3. Ответ на первый вопрос | 2 балла |
| 4. Вычисление площади поверхности Солнца | 2 балла |
| Если формула неправильная, но $S \propto R_{\odot}^2$, то этот этап не засчитывается, а следующий оценивается с учётом этой ошибки. В противном случае не оцениваются оба этапа. | |
| 5. Ответ на второй вопрос | 2 балла |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 2

В 1978 году в военно-морской обсерватории США во Флагстаффе (Аризона, примерно 600 км от тихоокеанского побережья) проводились наблюдения Плутона на основании которых Джеймс Кристи 22 июня открыл спутник Плутона Харон. Для подтверждения своего открытия Кристи сделал новую фотографию 2 июля 1978 года в 4 часа по всемирному времени, где Харон был найден в предсказанном положении. В какой день недели была сделана эта фотография?

Решение. Нам известно, что 10 февраля 2024 года — это суббота. С момента фотографирования до 2 июля 2023 года прошло 45 лет, из которых 11 — високосных. Со 2 июля до 10 февраля прошло $29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 10 = 223$ дня. Значит, всего с момента фотографирования прошло

$$45 \times 365 + 11 + 223 = 16\,659 \text{ дней,}$$

или 2379 недель и 6 дней. Впрочем, число недель неважно. Отсчитываем дни недели на 6 дней в прошлое и получаем, что 2 июля 1978 года было воскресенье.

Казалось бы, мы нашли ответ. Однако присмотримся к условию более внимательно. Нам дано всемирное время наблюдения. Следует учесть, что время во Флагстаффе отличается от всемирного. Территория США очень велика, а обсерватория находится почти на западном побережье. Только в самых восточных штатах США разница со всемирным временем может быть 4 часа и то только летом (на большей части территории США используется летнее время). Поэтому в момент наблюдения в обсерватории было ещё 1 июля, т. е. суббота.

Для ясности добавим два факта:

- В Аризоне используется время UTC−7 и не применяется летнее время, т. е. в момент наблюдения местное время было 21 час.
- В 4 часа местного времени Плутон уже зашёл за горизонт.

Критерии проверки

1. Определение числа дней, прошедших с открытия Харона **2 балла**
2. Определение дня недели **3 балла**
Если первый пункт выполнен с ошибкой, но второй с учётом этой ошибки выполнен верно, то за него выставляется 2 балла.
3. Учёт того, что во Флагстаффе были предыдущие сутки **3 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Последняя максимальная утренняя элонгация Меркурия в 2023 году произошла 22 сентября. В каких месяцах можно наблюдать Меркурий в максимальной элонгации утром в 2024, году и какая из этих элонгаций наиболее благоприятна для наблюдений? Орбиту Меркурия считать круговой.

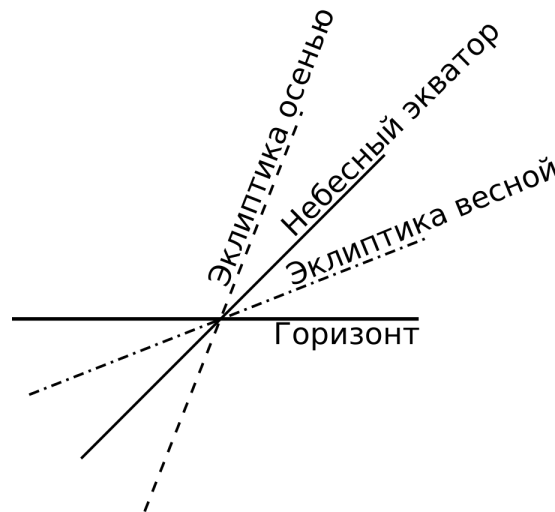
Решение. Интервал времени между двумя последовательными одноимёнными конфигурациями планеты называется синодическим периодом. Вычислим его, воспользовавшись уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0},$$
$$S = \frac{TT_0}{T_0 - T} = \frac{88 \cdot 365.26}{365.26 - 88} \approx 116 \text{ суток.}$$

Здесь T_0 и T — сидерические периоды обращения Земли и Меркурия. Надо понимать, что из-за вытянутости орбиты Меркурия мы можем говорить только о среднем значении синодического периода. Поэтому даты всех следующих элонгаций мы получим приблизительно.

Определим даты элонгаций в 2024 году. 22 сентября — это $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 22 = 265$ день года. Добавим ещё 116 суток и получим 381. Это уже следующий год, поэтому вычтем 365. Получаем 16 января. Добавляя несколько раз по 116 суток, получим 132-й, 248-й и 364-й дни 2024 года. Это 11 мая, 4 сентября и 29 декабря.

Наиболее благоприятной будет та элонгация, в которой Меркурий будет наблюдаться максимально высоко на сумеречном небе. Для этого требуется, чтобы угол между эклиптической и горизонтальной линиями был максимальным.



Рассмотрим положение эклиптики в моменты восхода точек равноденствия. В точке весеннего равноденствия Солнце переходит из южной небесной полусферы в северную. Поэтому в момент восхода точки весеннего равноденствия видимая часть эклиптики будет заключена между экватором и горизонтом. Следовательно, в элонгации в конце марта Меркурий наблюдать затруднительно. В дальнейшем Солнце начинает восходить ближе к северу, откуда следует, что угол между горизонтом и эклиптической линией уменьшится ещё сильнее. Майская элонгация для наблюдений будет очень неудачной.

Напротив, на восходе точки осеннего равноденствия эклиптика будет видна высоко, а значит элонгация 4 сентября будет наиболее благоприятной для наблюдений.

Критерии проверки

1. Вычисление синодического периода Меркурия **2 балла**
2. Определение месяцев, в которые будут наблюдаться утренние элонгации **по 1 баллу**
3. Объяснение, почему осень предпочтительнее весны **1 балл**
4. Окончательный вывод **1 балл**
Если вместо синодического используется сидерический период, то оценки за пп. 1, 2, 4 не выставляются.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 4

Известно, что высота орбиты некоторого спутника в 8 раз меньше высоты геостационарной орбиты. Сколько раз можно наблюдать восход этого спутника над горизонтом за 60 дней на экваторе? Считать, что спутник видно как ночью, так и днём.

Решение. Сначала определим радиус орбиты спутника R . Геостационарной называется орбита, двигаясь по которой тело совершает оборот за звёздные сутки. Чтобы найти её радиус, воспользуемся 3 законом Кеплера, сравнив спутник с Луной:

$$R = R_{\text{Л}} \left(\frac{T}{T_{\text{Л}}} \right)^{2/3} = 384400 \left(\frac{0.997}{27.3} \right)^{2/3} \approx 42\,300 \text{ км.}$$

Здесь мы учли, что звёздные сутки T немного короче солнечных.

В условии сравниваются не радиусы орбит спутников, а их высоты, то есть расстояния от земной поверхности. Высота геостационарной орбиты составляет $42300 - 6400 = 35\,900$ км. Тогда высота орбиты спутника $35900/8 \approx 4488$ км, а её радиус — $R_1 = 4488 + 6400 = 10\,888$ км.

Снова воспользуемся третьим законом Кеплера для вычисления периода обращения спутника:

$$T_1 = T \left(\frac{R_1}{R} \right)^{3/2} = 23.93 \left(\frac{10888}{42300} \right)^{3/2} \approx 3.12 \text{ ч.}$$

Для наблюдателя на экваторе этот спутник будет находиться на небесном меридиане. Он будет восходить в точке восхода с периодом, равным его синодическому периоду. Определим этот период из уравнения синодического движения:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}$$
$$S = \frac{TT_1}{T - T_1} = \frac{23.93 \cdot 3.12}{23.93 - 3.12} \approx 3.6 \text{ ч.}$$

Наблюдательный период составляет 60 дней или $60 \cdot 24 = 1440$ ч. За это время пройдёт $1440/3.6 = 400.7$ синодических периодов спутника. Значит, можно было наблюдать 400 или 401 восход.

Заметим, что если посчитать радиус орбиты спутника в 8 раз меньше радиуса геостационарной орбиты, то в ответе получим 1301 восход. Однако этот ответ не имеет смысла, поскольку в этом случае радиус орбиты спутника меньше радиуса Земли.

Критерии проверки

1. Радиус геостационарной орбиты. Участник может знать эту величину на память **1 балл**
 Использование солнечных суток вместо звёздных не является причиной для снижения оценки.
2. Высота геостационарной орбиты **1 балл**
3. Высота орбиты спутника **1 балл**
4. Период обращения спутника **1 балл**
 Если радиус орбиты спутника $R/8 \approx 5300$ км, то за правильно полученный ответ (≈ 1 ч) оценка выставляется.
5. Синодический период спутника **2 балла**
 Если радиус орбиты спутника $R/8 \approx 5300$ км, то в случае правильного вычисления выставляется только 1 балл.
6. Число восходов **2 балла**
 Оценивается только при правильном выполнении всех предыдущих этапов решения.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 5

Путешественники, оказавшиеся на необитаемом острове, наблюдали за одной из звёзд. Они не смогли определить, входит ли эта звезда в созвездие Южный Крест или астеризм Ложный Крест. Выяснилось, что высота верхней кульминации этой звезды составляет $h_v = 67.5^\circ$, а высота нижней кульминации — $h_n = 7.5^\circ$. Нижняя кульминация этой звезды 5 октября произошла в полночь. У путешественников были обычные часы, показывающие московское время. Оказалось, что в момент местной полуночи стрелки на циферблате часов показывают 3 часа 51 минуту. Определите координаты острова и звезду, за которой следили путешественники.

Звезда	Прямое восхождение	Склонение	Звезда	Прямое восхождение	Склонение
Акрукс (α Cru)	12.5 ^h	-63°	Авиор (ε Car)	8.4 ^h	-60°
Мимоза (β Cru)	12.8 ^h	-60°	Аспидиске (ι Car)	9.3 ^h	-59°
Гакрукс (γ Cru)	12.5 ^h	-57°	Маркеб (κ Vel)	9.4 ^h	-55°
Имаи (δ Cru)	12.3 ^h	-59°	Альсефина (δ Vel)	8.7 ^h	-55°

Решение. Нам неизвестно, с какой стороны от зенита кульминировала звезда. Можно проверить оба варианта, но можно быстро отсеять лишний. Все возможные звёзды имеют склонения

δ от -55° до -63° . Высоту звезды в нижней кульминации h_n можно найти по формуле

$$h_n = |\delta| + |\varphi| - 90^\circ = -\delta - \varphi - 90^\circ.$$

Здесь мы учли, что склонение и широта φ отрицательные: склонение напрямую по условию, а широта — как следствие того, что высота нижней кульминации положительная. Тогда можем сделать вывод, что наблюдения проводятся на широтах от -34.5° до -42.5° . Поскольку при $|\delta| > |\varphi|$ кульминация происходит между зенитом и полюсом, делаем вывод, что звезда кульминировала к югу от зенита. Формула для высоты в верхней кульминации имеет вид

$$h_v = 90^\circ + |\delta - \varphi| = 90^\circ + \delta - \varphi.$$

Сложим первое и второе уравнения и получаем

$$h_v + h_n = -2\varphi.$$

Отсюда $\varphi = -37.5^\circ$ или 37.5° ю. ш. Вычтем первое уравнение из второго и получим

$$h_v - h_n = 180^\circ - 2\delta, \quad \delta = 90^\circ - \frac{h_v - h_n}{2} = 60^\circ.$$

Такое склонение имеют две звезды: Мимоза и Авиор. Для того чтобы сделать окончательный выбор, обратим внимание на время кульминации. Звёздное и солнечное время совпадают в день осеннего равноденствия, который выпадает на 22 или 23 сентября. Иными словами, в этот день нижняя кульминация Солнца совпадает с верхней кульминацией точки весеннего равноденствия. В нижней кульминации оказывается точка осеннего равноденствия. Поскольку звёздные сутки на 3 минуты 54 секунды короче солнечных, то каждый следующий день в полночь в нижней кульминации оказываются звёзды с большими прямыми восхождениями. Спустя 12 или 13 дней, т.е 5 октября, в полночь в нижней кульминации окажутся звёзды с прямым восхождениями около 12.8^h . Значит, искомая звезда — Мимоза.

Осталось определить долготу острова. Заметим, что поскольку циферблат стрелочный, мы можем определить московское время с точностью до 12 часов: 3 часа 51 минута или 15 часов 51 минута. Московское время отличается от всемирного на 3 часа. Поэтому всемирное время равно или 0 часов 51 минуте, или 12 часам 51 минуте. Следовательно, долгота острова или 51^m з. д. (12.75° з. д.), или 11^h09^m в. д. (167.25° в. д.).

Критерии проверки

- | | |
|--|-------------------|
| 1. Определение звезды | 3 балла |
| Если участник определил только склонение звезды и не смог сделать однозначный выбор, то выставляется 1 балл. | |
| 2. Определение широты острова | 2 балла |
| 3. Правильная разность московского и всемирного времени | 1 балл |
| 4. Определение долготы острова | по 1 баллу |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 6

Космический корабль опустился на поверхность одного из галилеевых спутников Юпитера и сделал снимок участка неба вблизи горизонта (см. отдельный лист).

1. Напишите собственные имена помеченных цифрами ярких звёзд.
2. На какой из спутников сел космический аппарат?
3. Как сместится Юпитер относительно горизонта через два часа после момента, когда была сделана фотография?
4. Спустя какое время фаза Юпитера станет равна 50%? Какая часть останется освещённой?

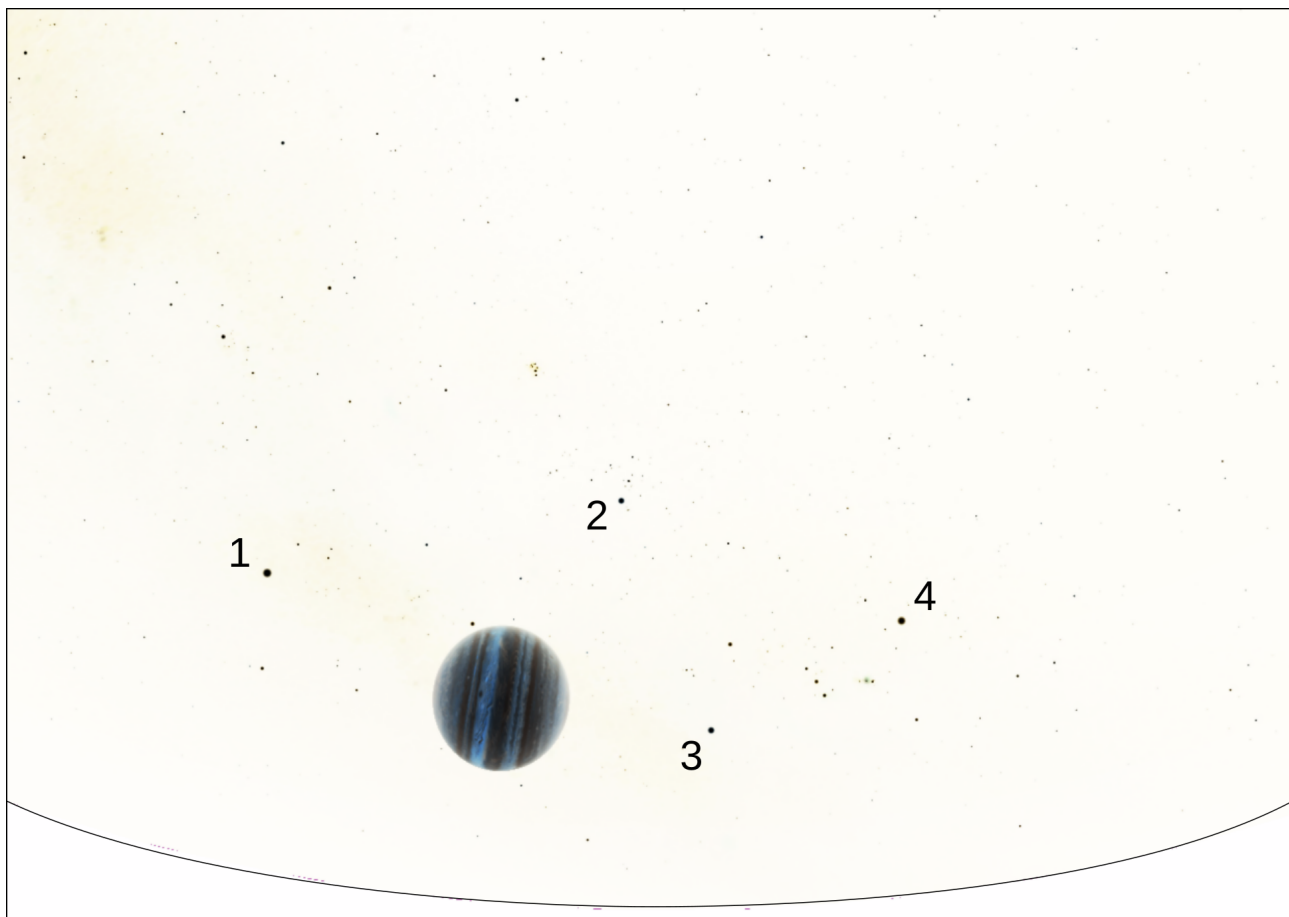
Характеристики галилеевых спутников

Название	Радиус орбиты, км	Орбитальный период, сут	Осевого период, сут	Радиус, км
Ио	421 800	1.769	1.769	1800
Европа	671 100	3.551	3.551	1560
Ганимед	1 070 400	7.155	7.155	2630
Каллисто	1 882 700	16.689	16.689	2410

Орбиты всех четырёх спутников круговые и лежат в плоскости экватора Юпитера. Юпитер: экваториальный радиус — 71 500 км, полярный радиус — 66 850 км.

Угловые расстояния между яркими звёздами:

Альдебаран — Беллатрикс	15.75°	Бетельгейзе — Капелла	39.5°
Бетельгейзе — Поллукс	33.25°	Кастор — Поллукс	4.5°
Ригель — Альдебаран	26.5°	Процион — Сириус	25.75°



Решение. Звезда 1 — Капелла, звезда 2 — Альдебаран, звезда 3 — Бетельгейзе, звезда 4 — Ригель.

Определим угол, под которым виден экваториальный диаметр Юпитера D_J со всех четырёх спутников. Если R — радиус орбиты спутника, то угловой диаметр в градусах равен $\delta = 57.3 \cdot D/R$. Тогда для Ио эта величина равна 19.4° , Европы — 12.2° , Ганимеда — 7.65° , Каллисто — 4.35° .

Теперь определим угловой размер Юпитера на рисунке. Для этого сравним его с известными расстояниями между звёздами. Из приведённых в справочных данных звёзд на рисунке можно найти Альдебаран, Беллатрикс, Бетельгейзе, Капеллу и Ригель. Аккуратно проведя измерения, получим угловой размер Юпитера около 12° , что означает, что космический корабль опустился на Европу.

Из равенства периода обращения галилеевых спутников вокруг Юпитера их осевым периодам следует, что эти спутники всегда обращены к Юпитеру одной стороной, подобно тому как Луна обращена всегда одной стороной к Земле. Следовательно, относительно горизонта спутника Юпитер не смещается.

В момент фотографирования виден полностью освещённый диск Юпитера. Значит, половину диска будет видно через четверть оборота спутника, т. е. через 0.89 сут или 21.3 часа.

Только две планеты солнечной системы вращаются в противоположную сторону относительно своего движения вокруг Солнца. Полосы Юпитера параллельны его экватору. Капелла (звезда 1) находится ближе к северному полюсу эклиптики, чем Бетельгейзе и Ригель (звёзды 3 и 4). Значит, северный полюс Юпитера смотрит налево. Спутник, облетая Юпитер, движется вверх, то есть постепенно начинает заглядывать на тёмную сторону сверху. Следовательно, освещённой останется нижняя часть планеты.

Критерии проверки

- | | |
|---|-------------------|
| 1. Правильные названия звёзд | по 1 баллу |
| 2. Определение углового диаметра Юпитера в диапазоне от 11° до 13° | 3 балла |
| При размере Юпитера от 10° до 11° или от 13° до 14° выставляется 2 балла. При ещё худшей точности измерений — 0 баллов. | |
| Если правильная величина получилась при неверном измерении, отождествлении звёзд и т. п., этот этап не засчитывается. | |
| 3. Определение углового размера Юпитера с галилеевых спутников | 1 балл |
| Альтернативный вариант — определение расстояния до Юпитера. | |
| 4. Правильный ответ на второй вопрос | 1 балл |
| Оценивается только при правильном выполнении этапов 2 и 3. | |
| 5. Вывод о том, что Юпитер никуда не сместится | 1 балл |
| 6. Время до фазы 50% | 1 балл |
| 7. Останется освещена нижняя часть Юпитера | 1 балл |

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Справочные данные

Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\text{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8 \text{ Вт м}^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут}$
Звёздные сутки	$T_{\zeta} = 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21.45''$
Средняя плотность Земли	$\rho_{\oplus} = 5515 \text{ кг/м}^3$
Синодический месяц	$S_{\zeta} = 29.53059 \text{ сут}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20 \text{ кпк}$
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг с}^{-3} \text{ К}^{-4}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевого период
Солнце				1.989×10^{30}	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	3.302×10^{23}	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	4.869×10^{24}	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	5.974×10^{24}	6.37	23.93 ч
Луна	0.00257	0.0549	27.322 сут	7.348×10^{22}	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	6.419×10^{23}	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	1.899×10^{27}	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	5.685×10^{26}	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	8.683×10^{25}	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	1.024×10^{26}	24.7	16.11 ч