Задача A. Экзамен

Нетрудно видеть, что минимальный ответ равен $max(a-b, 0)$, а максимальный $min(a, n-b)$. Минимальный достигается тогда, когда люди до нас «жадно» забирают наши билеты, а максимальный, наоборот, — когда забирают сначала билеты, которые мы не знаем.

Задача B. Разрез прямоугольника

Пусть $a \leqslant b$. Рассмотрим несколько случаев:

- Если a чётно, то мы можем разрезать прямоугольник на два прямоугольника размера $\frac{a}{2} \times b$ и сложить из них прямоугольник $\frac{a}{2} \times 2b$, который точно отличается от $a \times b$.
- Если b чётно и $b \neq 2a$, то мы можем разрезать прямоугольник на два прямоугольника размера $a \times \frac{b}{2}$ и сложить из них прямоугольник размера $2a \times \frac{b}{2}$. Заметим, что здесь мы пользуемся тем, что $b \neq 2a$, так как если $b = 2a$, то мы получим такой же прямоугольник размера $b \times a$.
- Если a и b нечётные или $b = 2a$ и a нечётно, то прямоугольник не является интересным. Легко понять, что если мы разрежем прямоугольник размера $a \times b$ на два прямоугольника размера $a \times c$ и $a \times d$, где $c \neq d$, то мы всегда сможем сложить только исходный прямоугольник (аналогично если мы разрежем на прямоугольники $c \times b$ и $d \times b$). А отсюда следует, что мы должны разделить одну из сторон прямоугольника пополам, поэтому хотя бы одна сторона должна быть чётной.

Пусть $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ — количество нечётных чисел от 1 до n. Тогда количество интересных прямоугольников можно вычислить следующим образом: всего есть $\frac{n(n-1)}{2}$ различных прямоугольников, длины сторон которых не превосходят n. Вычтем из этого количества количество прямоугольников, у которых обе стороны нечётны. Это количество равно $C^2_{\lceil x \rceil} = \frac{x(x-1)}{2}$. После этого нужно вычесть те прямоугольники, у которых большая сторона равна удвоенной меньшей, и при этом меньшая сторона нечётная. Это количество равно $\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \right\rceil$, потому что в таком случае меньшая сторона не должна превышать $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, и при этом должна быть нечётной.

Получаем итоговую формулу: $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} - \left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \right\rceil$.

Задача C. Урок физкультуры

Все номера повторяются через $2k - 2$ позиции. Если у мальчика Васи номер при расчете равен x, то он может быть на позициях либо вида $(2k-2) \cdot t + x$, либо $(2k-2) \cdot t + k + k - x$, для каких-то неотрицательных t. Это верно, для всех x, кроме $x = 1$ и $x = k$ — для этих значений остается только один вариант.

Теперь осталось только посчитать количество различных позиций, имеющих вид описанный выше и не превосходящих n. Можно явно вывести формулы для количества таких позиций. А именно для позиций вида $(2k-2) \cdot t + x$ число вариантов равно $\lfloor \frac{n-x+2k-2}{2k-2} \rfloor$, где $\lfloor\rfloor$ — округление вниз. А для позиций вида $(2k-2) \cdot t + k + k - x$ число вариантов равно $\lfloor \frac{n+x-2}{2k-2} \rfloor$. Опять же, обратите внимание, что случаи $x = 1$ и $x = k$ нужно рассмотреть отдельно.

Задача D. Самокат

Рассмотрим произвольный путь курьера. Пусть он стартовал в точке L, а закончил в точке R. Тогда, если рассмотреть любой другой путь, старт которого находится внутри $(L, R]$, то он будет оканчиваться не дальше чем в R. Действительно, рассмотрим точку старта $j \in (L, R]$. Про нее известно, что $A_j < A_L$ и $A_{R+1} \geqslant A_L$, значит $A_{R+1} > A_j$. Следовательно нет смысла рассматривать пути, лежащие внутри других.

Теперь рассмотрим жадный алгоритм — будем идти слева направо и поддерживать указатель на конец пути. Тогда если указатель сдвинется в точку, которая не ниже старта, то можно обновить ответ и начать дальнейшее рассмотрение уже начиная с этого указателя.

Оценим асимтотику. Указатель двигается только вправо и пробегает по каждой точке 1 раз, поэтому итоговая асимптотика $O(n)$.

Задача E. Подземелья Одинокой горы

Научимся решать задачу при $n = 1$. Пусть есть только одна раса и количество её представителей равно c. Заметим, что при фиксированном k нам выгодно разделить представителей расы по отрядам практически поровну.

Если c кратно k, то нам выгодно в каждый отряд взять ровно по $y = \frac{c}{k}$ существ. И тогда суммарное количество пар существ, которые находятся в разных отрядах, равно $\frac{k(k-1)}{2} \cdot y^2$ (всего есть $\frac{k(k-1)}{2}$ пар отрядов, и для каждой пары отрядов есть y^2 пар существ из разных отрядов).

В общем случае, когда c может быть не кратно k, обозначим $y = \left\lfloor \frac{c}{k} \right\rfloor$ и $y' = \left\lceil \frac{c}{k} \right\rceil$. Тогда нам выгодно сделать отряды размера y и y', причём количество отрядов размера y' равно $c \bmod k$ (мы как бы делаем все отряды размера y, а потом в какие-то отряды добавляем по 1 из оставшейся части). В таком случае суммарное количество пар существ, которые находятся в разных отрядах, равно $C^2_{k-c \bmod k} \cdot y^2 + C^2_{c \bmod k} \cdot y'^2 + (k - c \bmod k) \cdot (c \bmod k) \cdot y \cdot y'$. Осталось заметить, что нет смысла делать $k > c$, поэтому можно просто перебрать k от 1 до c и выбрать оптимальное.

При $n > 1$ можно заметить, что при фиксированном k мы можем решать задачу независимо для каждой расы. Пусть количество представителей i-й расы равно c_i. Тогда переберём для неё k от 1 до c_i и прибавим максимальную суммарную силу к значению cnt_k (массив cnt является общим для всех рас). Также заметим, что при $k > c_i$ мы получим такую же суммарную силу, как и при $k = c_i$. Тогда в дополнительном массиве add (опять же общем для всех рас) прибавим к add_{c_i} максимальную суммарную силу для $k = c_i$.

Получаем такое решение: сначала посчитаем описанные массивы cnt и add. После этого переберём k от 1 до максимального c_i. Максимальная суммарная сила отрядов для фиксированного k будет равна $(cnt_k + (\text{сумма значений } add_i \text{ для } i < k)) \cdot b - (k - 1) \cdot X$. Из данных значений нужно выбрать максимум.