7 класс

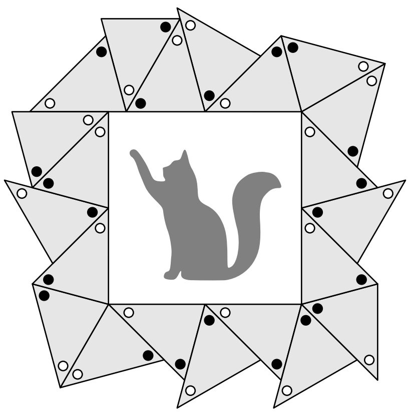
Задача 1. Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, не большие 25, так, чтобы в любой паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое. **[*4 балла*]** (*И. Ященко*)

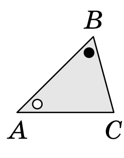
Решение. Больше всего соседей у центральной клетки — поставим туда 1. В соседние с центральной клеткой поставим числа поменьше — 2, 3, 4, 5. На центральное число все они делятся (на 1 делится любое число). А чтобы условие выполнялось и для угловых клеток, поставим в каждый угол произведение его соседей. Так получается один из возможных примеров:

10	2	8
5	1	4
15	3	12

Можно придумать и другие примеры.

Задача 2. Коля пришёл в музей современного искусства и увидел квадратную картину в раме необычной формы, состоящей из 21 равного треугольника. Коля заинтересовался, чему равны углы этих треугольников. Помогите ему их найти.





[*5 баллов*]
(*И. Русских*)

Ответ. 45°, 60° и 75°.

Решение. Посмотрим на левый верхний угол картины. Из него видно, что два угла, равных углу A, в сумме дают 90°. Значит, угол A равен 45°. Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C, один угол, равный углу A, и угол квадрата составляют полный угол в 360°. Значит, $3\angle C = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 225^\circ$, то есть угол C равен $225^\circ : 3 = 75^\circ$. Тогда угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

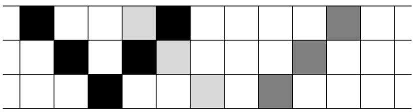
Задача 4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 5).

Задача 5. На острове живут красные, синие и зелёные хамелеоны. 35 хамелеонов встали в круг. Через минуту все они одновременно поменяли цвет, каждый на цвет одного из своих соседей. Ещё через минуту снова все одновременно поменяли цвета на цвет одного из своих соседей. Могло ли оказаться, что каждый хамелеон побывал и красным, и синим, и зелёным? **[*9 баллов*]** (*И. Русских*)

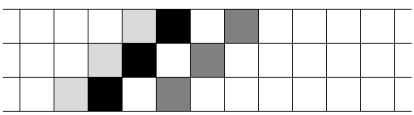
Ответ. Не могло.

Первое решение. Предположим, такое случилось. В первый раз никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям — иначе он будет стоять между двумя хамелеонами этого же цвета и во второй раз будет вынужден окраситься в этот цвет вновь. Но никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям и во второй раз: если так произошло, то этот хамелеон минуту назад получил этот цвет от одного из соседей, значит, один из его соседей принимал этот цвет два раза — в начале и в конце. Поэтому каждый хамелеон каждый раз отдаёт свой цвет не более чем одному соседу, то есть количество хамелеонов каждого цвета не увеличивается. Но хамелеонов 35, а цветов 3, значит, изначально хамелеонов какого-то цвета не больше 11 (иначе суммарно хамелеонов хотя бы $12 \cdot 3 = 36$). Тогда хамелеонов этого цвета за всё время было не больше $11 \cdot 3 = 33$, и какой-то из хамелеонов точно в этот цвет не окрашивался.

Второе решение. Предположим, что такое могло быть. Пронумеруем хамелеонов по кругу от 1 до 35 и нарисуем таблицу из 3 строк и 35 столбцов, в которой каждому хамелеону соответствует столбец (будем считать таблицу зацикленной, то есть после 35-го столбца будет вновь идти первый). Закрасим каждую клетку в первой (верхней) строке в изначальный цвет соответствующего хамелеона, во второй строке — в его цвет через минуту и в третьей строке — в итоговый цвет. Итоговый цвет каждый хамелеон мог позаимствовать от правого или от левого соседа, но, поскольку каждый хамелеон каждый цвет принимал ровно один раз, правый сосед мог получить этот цвет после первой минуты только от своего правого соседа, а левый — только от своего левого. То есть в таблице от каждой клетки третьей строки вверх идёт одна или две одноцветные диагонали (см. рис.).

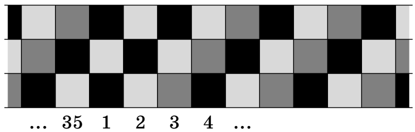


Посмотрим на первого хамелеона. Без ограничения общности, пусть от его клетки в третьем ряду одноцветная диагональ идёт вправо. Посмотрим на хамелеона номер 3: в его столбце первая и третья клетки должны быть разного цвета, а значит, диагональ от его нижней клетки может идти только вправо. Рассуждая аналогично, получаем, что и у хамелеонов с номерами 5, 7, ..., 35 диагональ от нижней клетки идёт вправо.



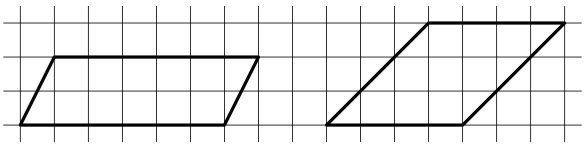
... 35 1 2 3 4 ...

Но те же самые рассуждения можно применить к хамелеонам 35 и 2 — то есть и от нижних клеток хамелеона 2, а также хамелеонов 4, 6, ..., 34 диагонали могут идти только вправо! Значит, вся таблица раскрашена в диагональные «полоски». При этом диагонали соседних хамелеонов или хамелеонов, сидящих через одного, должны быть разного цвета: иначе один из хамелеонов два раза примет один и тот же цвет. Это означает, что цвета полосок повторяются (первый, второй, третий, первый, второй, третий, ...), тогда итоговый цвет 35-го хамелеона совпадает с итоговым цветом 2-го — противоречие.



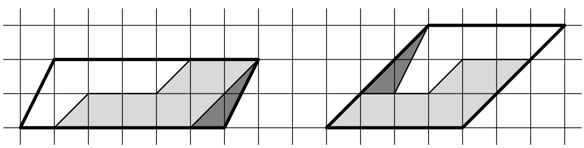
Комментарий. Из решения следует, что для выполнения желаемого условия количество хамелеонов должно делиться на 3; если изначальные цвета хамелеонов чередуются (красный, синий, зелёный, красный, синий, зелёный, ...) и каждый хамелеон каждый раз будет брать цвет от хамелеона справа, то условие задачи будет выполнено.

Задача 6. Разрежьте первый параллелограмм на три части и сложите из них второй.

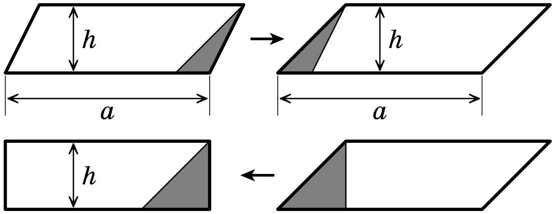


[*9 баллов*] (*Т. Голенищева-Кутузова*)

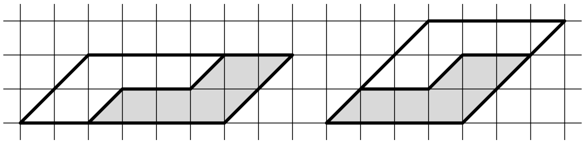
Ответ.



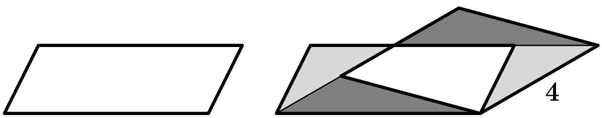
Комментарии. 1. Любой параллелограмм нетрудно разрезать на две части и сложить из них другой параллелограмм с такими же основанием a и высотой h. Отсюда, кстати, можно увидеть, что все такие параллелограммы имеют одинаковую площадь, и найти эту площадь: она равна площади прямоугольника $a \times h$. В частности, параллелограммы из условия имеют одинаковую площадь: $6 \times 2 = 4 \times 3$.



2. Если первую фигуру можно разрезать на части и сложить из них вторую (будем говорить «перекроить первую фигуру во вторую»), а вторую можно перекроить в третью, то и первую можно перекроить в последнюю (подумайте, почему!). Это помогает найти решение задачи: можно сначала перекроить первый параллелограмм в параллелограмм с нужным наклоном боковой стороны (как показано выше), а потом изменить пропорции параллелограмма, не меняя наклон боковой стороны.



Можно поступить и по-другому: сначала «перекосить» (действуя, как в первом комментарии) первый параллелограмм так, чтобы у него появилась сторона длины 4, потом перекосить этот параллелограмм во второй. Получится другое разрезание — вершины частей, правда, уже не будут лежать в узлах сетки.



3. Теорема Бо́йяи—Ге́рвина говорит, что вообще любые два многоугольника одинаковой площади можно перекроить один в другой. (Доказательство можно прочитать в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры». Важную роль в нём играют две идеи из предыдущих комментариев.) Но, вообще говоря, может потребоваться много частей. Например, чтобы перекроить квадрат 1×1 в прямоугольник $\frac{1}{100} \times 100$, понадобится разрезать квадрат на несколько десятков частей.