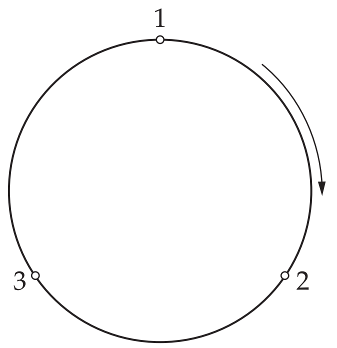
85-я Московская олимпиада школьников по физике
2024 год
7 класс

Условия задач, авторские решения, критерии оценивания

1. На «стадионе» (8 баллов)

Бычков А. И.

Три маленьких тела изначально покоятся в трёх равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 метра (см. рисунок).



В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями: $v_1 = 4{,}0$ м/с, $v_2 = 3{,}6$ м/с, $v_3 = 3{,}0$ м/с (индекс в обозначении скорости соответствует номеру тела на рисунке). При этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 метра. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

Решение

Наименьшая длина колонны достигается в тот момент времени, когда самое быстрое тело встречается с самым медленным. Действительно, за миг до этого момента 1–ое тело сокращало расстояние до 3–го тела. Где бы ни находилось в это время 2–ое тело, «впереди» 3–го тела или «позади» 1–го, длина колонны уменьшалась. Сразу после встречи 1–го и 3–го тел длина колонны будет увеличиваться, при любом положении 2–го тела.

Впервые быстрое и медленное тела встретятся через время $\frac{2\text{ м}}{4\text{ м/с}-3\text{ м/с}} = 2$ с в том месте откуда стартовало третье тело. К этому моменту 2–ое тело пройдёт расстояние 7,2 м и окажется «впереди» других тел на «расстоянии» 20 см. При дальнейшем движении первое и третье тела будут встречаться через каждые 3 с в одном и том же месте — точке старта третьего тела. За 3 с второе тело проходит 3 круга и 1,8 м. Следовательно, в момент второй встречи первого и третьего тел второе тело находится на расстоянии 20 см + 180 см = 200 см по ходу движения. Длина колоны в этом случае равна 100 см. В момент третьей встречи расстояние между вторым телом и двумя другими равно 200 см + 180 см − 300 см = 80 см по ходу движения. Длина колонны равна 80 см. Аналогично рассуждая, находим длину колонны в момент четвертой, пятой и шестой встреч первого и третьего тел. В момент четвёртой встречи длина колонны равна 40 см (второе тело находится на таком расстоянии «позади» первого и третьего тел), в момент пятой встречи длина колонны равна 140 см (второе тело находится на таком расстоянии «впереди» первого и третьего тел). А в момент шестой встречи длина колоны составит 20 см и второе тело окажется в той же точке окружности, что и в момент первой встречи первого и третьего тел. Значит, в ходе дальнейшего движения тел всё будет повторяться. Следовательно, минимальная длина колонны равна 20 см.

Ответ: 20 см.

Критерии

№	Критерий	Балл
1.1	В той или иной форме доказывается, что наименьшая длина "колонны"достигается в тот момент, когда самое быстрое тело встречается с самым медленным.	2,0
1.2	Указано, что первая встреча 1–го и 3–го тел состоится через 2 секунды после начала движения.	0,4
1.3	Верно указано положение 1–го и 3–го тел на окружности в момент их первой встречи.	0,4
1.4	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент первой встречи 1–го и 3–го тел.	0,5
1.5	Указано, что последующие встречи 1–го и 3–го тел будут происходить через каждые 3 с в том же самом месте на окружности.	0,4
1.6	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент второй встречи 1–го и 3–го тел.	0,8
1.7	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент третьей встречи 1–го и 3–го тел.	0,8
1.8	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент четвёртой встречи 1–го и 3–го тел.	0,8
1.9	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент пятой встречи 1–го и 3–го тел.	0,8

№	Критерий	Балл
1.10	Верно указано положение 2–го тела на окружности в момент шестой встречи 1–го и 3–го тел.	0,8
1.11	Получен верный числовой ответ с правильными единицами измерения. Этот критерий применяется в случае, если рассмотрены все 6 встреч 1–го и 3–го тел.	0,3

2. Хороший, плохой (6 баллов)
Дергачёв А. А.

Города A и B соединены дорогой, которая состоит из двух участков: «хорошего» (с недавно сделанным ремонтом, где машины едут быстро) и «плохого» (со старым разбитым асфальтом, по которому машины едут медленно). В некоторый момент времени из города A в город B выезжает машина, затем машины продолжают выезжать каждые 30 секунд. По «хорошему» участку дороги все машины едут с одинаковой большой скоростью, а по «плохому» — с одинаковой маленькой скоростью. Если подсчитать среднее арифметическое скоростей всех автомобилей на дороге в некоторый момент, когда первая машина уже прибыла в город B, а последняя ещё не выехала из города A, то получится величина $u = 70$ км/ч. Если же подсчитать среднее арифметическое скоростей только тех автомобилей на дороге, которые уже проехали половину расстояния между городами, то получится величина $u_2 = 60$ км/ч. Найдите скорость автомобилей на «хорошем» участке дороги, если известно, что его длина превышает длину «плохого» участка.

Решение

Пусть l_1, l_2 — длины «хорошего» и «плохого» участков дороги, v_1, v_2 — скорости автомобилей на этих участках. Пусть также Δt — временной интервал между автомобилями. Тогда дистанция между ближайшими автомобилями будет составлять $v_1\Delta t$ на быстром отрезке и $v_2\Delta t$ на медленном. Тогда на быстром отрезке в произвольный момент времени находится $N_1 = \frac{l_1}{v_1\Delta t}$ автомобилей, а на медленном — $N_2 = \frac{l_2}{v_2\Delta t}$. Среднее арифметическое их скоростей будет равно $u = \frac{N_1v_1+N_2v_2}{N_1+N_2}$, поскольку всего автомобилей $N_1 + N_2$. Имеем:

$$u = \frac{N_1v_1 + N_2v_2}{N_1 + N_2} = \frac{\frac{l_1}{v_1\Delta t}v_1 + \frac{l_2}{v_2\Delta t}v_2}{\frac{l_1}{v_1\Delta t} + \frac{l_2}{v_2\Delta t}} = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}}. \quad (1)$$

Отметим, что полученный результат совпадает со средней скоростью отдельного автомобиля на всей дистанции. Аналогичный результат справедлив для автомобилей на второй половине дистанции. Поскольку средняя скорость на второй половине ниже, чем на всей дистанции, ясно, что плохой отрезок дороги идет в конце пути. Тогда вторая половина дороги состоит из участка плохой дороги протяженностью l_2 и участка хорошей дороги протяженностью $\frac{l_1+l_2}{2} - l_2 = \frac{l_1-l_2}{2}$. Средняя скорость на второй половине пути может быть найдена как

$$u_2 = \frac{\frac{l_1+l_2}{2}}{\frac{l_1-l_2}{2v_1} + \frac{l_2}{v_2}}. \quad (2)$$

Из соотношения (1) получаем

$$\frac{l_2}{v_2} = \frac{l_1 + l_2}{u} - \frac{l_1}{v_1}. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) имеем

$$\frac{l_1 + l_2}{2u_2} = \frac{l_1 - l_2}{2u_1} + \frac{l_2}{v_2} = -\frac{l_1 + l_2}{2v_1} + \frac{l_1 + l_2}{u}.$$

После сокращения на $l_1 + l_2$ получаем

$$\frac{1}{2u_2} = -\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{u},$$

откуда $v_1 = \frac{uu_2}{2u_2-u} = 84$ км/ч.

Ответ: 84 км/ч.

Критерии

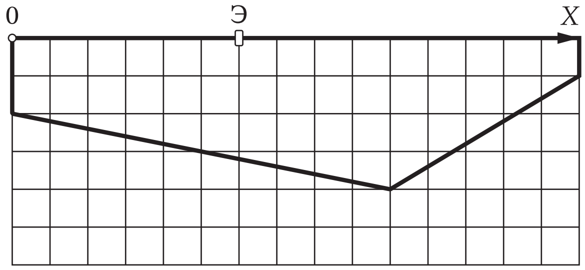
№	Критерий	Балл
2.1	Присутствует доказательство или обоснование конкретной последовательности участков “хороший” — “плохой”. **Примечание**. При применении равенства количества автомобилей на двух половинах пути или использования понятия “неразрывности” потока машин все последующие действия не оцениваются.	0,5
2.2	Найдено количество автомобилей на быстром участке дороги.	0,5
2.3	Найдено количество автомобилей на медленном участке дороги.	0,5
2.4	Доказана эквивалентность среднего арифметического скоростей u и средней скорости одного автомобиля на всей дистанции. **Примечание**. При необоснованном применении формулы все последующие действия не оцениваются.	2,5

№	Критерий	Балл
2.5	Показана эквивалентность среднего арифметического скоростей u_2 и средней скорости одного автомобиля на второй половине дистанции.	0,5
2.6	Средняя скорость на второй половине пути выражена через длину “плохого” участка и участка “хорошей” дороги, приходящегося на вторую половину пути.	0,5
2.7	Получен ответ.	1,0

Если задача идейно решена верно, но была допущена арифметическая ошибка, то выставляется 5,0 баллов.

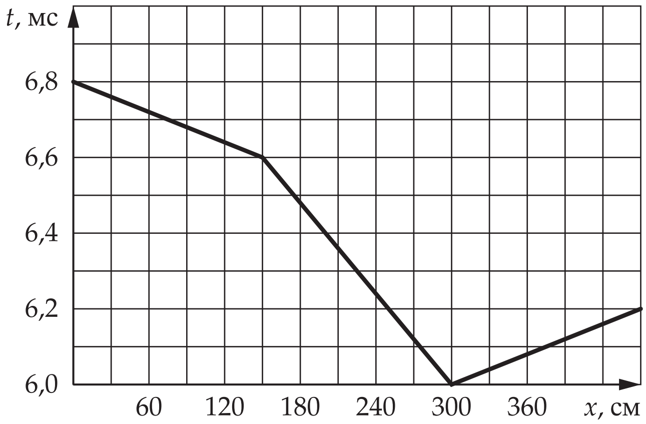
3. Эхолот на льдине (8 баллов)
Бычков А. И.

На рисунке, представленном ниже, показан профиль участка покоящейся льдины (вид сбоку). Длина стороны клетки соответствует 30 см. На плоской горизонтальной поверхности льдины с помощью специального эхолота проводят измерения, располагая эхолот в точках с разными координатами по оси OX (см рисунок).



Эхолот испускает звуковые сигналы вертикально вниз, а через некоторое время регистрирует отражённый от дна сигнал. Можно считать, что после отражения от дна сигнал распространяется вертикально вверх. На графике, представленном на втором рисунке, показана зависимость $t(x)$, где t — время, прошедшее с момента испускания звукового импульса эхолотом до момента приёма отражённого от дна сигнала, а x — координата эхолота.

Постройте график зависимости расстояния от верхней поверхности льдины до дна от координаты x. Считайте, что средние скорости распространения звука в льдине и в воде равны 3000 м/с и 1500 м/с соответственно.



Решение

Введём ось OY, направленную вертикально вниз, начало отсчёта которой совпадает с началом отсчёта оси OX. Так как профиль нижней поверхности льдины и график $t(x)$ представляют собой ломаные линии, следовательно, профиль дна водоёма тоже представляет собой ломаную линию. Покажем это. Пусть на некотором интервале оси OX профили нижней поверхности льдины и поверхности дна водоёма являются линейными функциями в зависимости от координаты x: $y_л = a_л x + b_л$ и $y_д = a_д x + b_д$ соответственно. Тогда

$$t(x) = 2 \cdot \left(\frac{a_л x + b_л}{v_л} + \frac{a_д x + b_д - a_л x - b_л}{v_в} \right),$$

где $v_л$, $v_в$ — скорости распространения звука в льдине и в воде соответственно. Видно, что $t(x)$ на данном интервале оси OX является линейной функцией.

Найдём координаты y поверхности дна при $x_1 = 0$ см, $x_2 = 150$ см, $x_3 = 300$ см и $x_4 = 450$ см, то есть в координатах концов трёх отрезков, из которых состоит график $t(x)$. Из уравнений

$$6{,}8 \text{ мс} = 2 \cdot \left(\frac{0{,}6 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(0) - 0{,}6 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right),$$

$$6{,}6 \text{ мс} = 2 \cdot \left(\frac{0{,}9 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(150) - 0{,}9 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right),$$

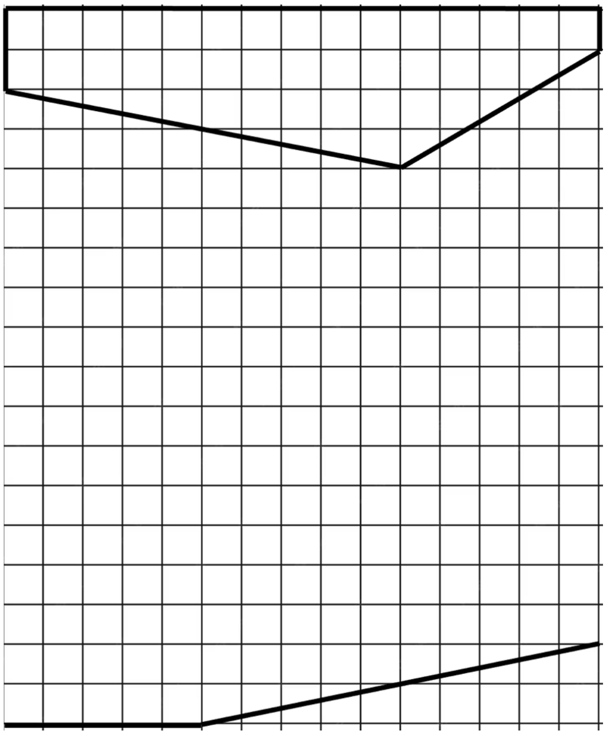
$$6{,}0 \text{ мс} = 2 \cdot \left(\frac{1{,}2 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(300) - 1{,}2 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right),$$

$$6{,}2 \text{ мс} = 2 \cdot \left(\frac{0{,}3 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(450) - 0{,}3 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right),$$

находим $y(0) = 5{,}4$ м, $y(150) = 5{,}4$ м, $y(300) = 5{,}1$ м, и $y(450) = 4{,}8$ м.

Теперь достаточно соединить четыре найденные точки координатной плоскости XY.

Ответ: Профиль дна представлен на рисунке.



Критерии

№	Критерий	Балл
3.1	В той или иной форме доказывается, что профиль дна водоёма представляет собой ломаную линию.	1,5
3.2	В решении присутствует правильная формула для нахождения времени, прошедшего с момента испускания звукового импульса эхолотом до момента приёма отражённого от дна сигнала: $t(x) = 2 \cdot \left(\frac{y_л}{v_л} + \frac{y_д - y_л}{v_в}\right)$ или аналогичная.	2,0
3.3	Верно найдена координата поверхности дна $y(0) = 5{,}4$ м.	0,8
3.4	Верно найдена координата поверхности дна $y(150) = 5{,}4$ м.	0,8
3.5	Верно найдена координата поверхности дна $y(300) = 5{,}1$ м.	1,6
3.6	Верно найдена координата поверхности дна $y(450) = 4{,}8$ м.	0,8
3.7	Нарисован правильный график зависимости расстояния от верхней поверхности льдины до дна водоёма от координаты x.	0,5

4. Плотность Луны (6 баллов)

Бычков А. И.

Согласно закону всемирного тяготения материальная точка и однородный шар притягиваются друг к другу с силой $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где G — фундаментальная константа под названием гравитационная постоянная, m_1, m_2 — массы материальной точки и шара соответственно, r – расстояние между материальной точкой и центром шара. Чему равна средняя плотность Луны, если средняя плотность Земли равна 5,5 г/см^3? Радиус Земли равен 6400 км, радиус Луны 1740 км. Ускорение свободного падения на Земле равно 9,8 Н/кг, а на Луне равно 1,6 Н/кг.

Решение

Рассмотрим материальную точку массой m, находящуюся на поверхности шарообразной планеты массой M. Силу тяжести, которая, с одной стороны, равна mg, можно также рассчитать, воспользовавшись законом всемирного тяготения $G \cdot \frac{mM}{R^2}$, где R — радиус планеты. Откуда находим, $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$. Ускорения свободного падения на Земле и на Луне равны соответственно:

$$g_З = G \cdot \frac{M_З}{R_З^2}, \quad g_Л = G \cdot \frac{M_Л}{R_Л^2},$$

а их отношение —

$$\frac{g_З}{g_Л} = \frac{M_З}{M_Л} \cdot \frac{R_Л^2}{R_З^2} = \frac{\rho_З V_З}{\rho_Л V_Л} \cdot \frac{R_Л^2}{R_З^2}. \tag{4}$$

Поскольку шарообразные планеты являются подобными телами (одну из них можно преобразовать в другую путём масштабирования), отношение их объёмов равно

$$\frac{V_З}{V_Л} = \frac{R_З^3}{R_Л^3}. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) получаем

$$\frac{g_З}{g_Л} = \frac{\rho_З R_З}{\rho_Л R_Л} \quad \Rightarrow \quad \rho_Л = \rho_З \cdot \frac{R_З}{R_Л} \cdot \frac{g_Л}{g_З} = 3{,}3 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: 3,3 г/см^3.

Критерии

№	Критерий	Балл
4.1	Получена формула для ускорения свободного падения на поверхности шарообразной планеты массой M и радиуса R: $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$.	2,0

№	**Критерий**	**Балл**
4.2	В решении присутствует формула, связывающая среднюю плотность материала ρ, его массу M и объём V: $M = \rho V$.	0,5
4.3	Из соображений подобия шарообразных тел выписано отношение объёмов Земли и Луны: $\frac{V_з}{V_л} = \frac{R_з^3}{R_л^3}$.	2,5
4.4	Получен верный числовой ответ с правильными единицами измерения.	1,0