Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 10 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2023/24

1 ноя 2023 г., 10:00 — 20 ноя 2023 г., 23:59

№ 1, вариант 1

5 баллов

В магазине есть апельсиновый, яблочный, персиковый и вишнёвый соки (в любом необходимом количестве). Требуется купить 10 пакетов сока, среди которых должны быть два апельсиновых и один персиковый. Сколько существует способов это сделать? Наборы, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми.

120

№ 1, вариант 2

5 баллов

В магазине есть апельсиновый, яблочный, персиковый и вишнёвый соки (в любом необходимом количестве). Требуется купить 12 пакетов сока, среди которых должны быть четыре апельсиновых и два персиковых. Сколько существует способов это сделать? Наборы, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми.

84

№ 2, вариант 1

5 баллов

Дано 2023 прямых в пространстве. Известно, что каждые две прямые пересекаются и никакие три не пересекаются в одной точке. Через каждую пару прямых провели плоскость. Какое максимальное количество плоскостей могло получиться?

1

№ 2, вариант 2

5 баллов

Даны 2024 прямые в пространстве. Известно, что каждые две прямые пересекаются и никакие три не пересекаются в одной точке. Через каждую пару прямых провели плоскость. Какое максимальное количество плоскостей могло получиться?

1

№ 3, вариант 1

10 баллов

Дан треугольник с углом 30° и площадью 1. Найдите минимальное значение квадрата стороны треугольника, лежащей напротив угла 30°. В ответ запишите целую часть найденного значения.

1

№ 3, вариант 2

10 баллов

Дан треугольник с углом 60° и площадью 2. Найдите минимальное значение квадрата стороны треугольника, лежащей напротив угла 60°. В ответ запишите квадрат найденного значения в формате обыкновенной дроби.

64/3

№ 4, вариант 1

10 баллов

Найдите площадь фигуры Φ, которая задана системой неравенств:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x}{\sqrt{3}} - 1\right| + |y-3| \leqslant 1 \\ x^2 + y^2 - 2y \geqslant 3 \end{cases}$$

В ответ запишите ближайшее целое число.

3

№ 4, вариант 2

10 баллов

Найдите площадь фигуры Ф, которая задана системой неравенств:

$$\begin{cases} |1-x| + \left|1 - \dfrac{y}{\sqrt{3}}\right| \leqslant 1 \\ x^2 + 2x + y^2 \geqslant 3 \end{cases}$$

В ответ запишите ближайшее целое число.

3

№ 5, вариант 1

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = xz + yz \\ 4xy - 1 = 4z \\ x^2 + 2xy + y^2 - z = 1 \end{cases}$$

Для каждой тройки решений найдите сумму x, y и z. В ответ запишите наименьшее из получившихся значений.

-1

№ 5, вариант 2

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (y-z)^2 = xz + xy \\ 4yz = 4x + 1 \\ z^2 + 2yz + y^2 = x + 1 \end{cases}$$

Для каждой тройки решений найдите сумму x, y и z. В ответ запишите наибольшее из получившихся значений.

1

№ 6, вариант 1

35 баллов

Сколько существует целых значений параметра a, при которых уравнение

$$(1-x)^5-(1+x)^9+\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{4-a^2}$$

имеет единственное решение?

5

№ 6, вариант 2

35 баллов

Сколько существует целых значений параметра a, при которых уравнение

$$(1+x)^5-(1-x)^5+\sqrt[3]{1+x}=2-\sqrt{9-a^2}$$

имеет единственное решение?

7

Задание 1.1

Решение: пусть есть 4 корзины с соками: каждая для сока своего вкуса (в порядке упоминания в условии). Пусть 1 соответствует перегородке между этими корзинами, а 0 пакету сока. Тогда, например, комбинация 0000101001000 означает, что взяли 4 пакета апельсинового сока, 1 — яблочного, 2 — персикового и 3 — вишневого. Такие комбинации устанавливают однозначное соответствие со способами покупки. Нам необходимо, чтобы было хотя бы два апельсиновых сока и один персиковый. Таким образом остается распределить семь оставшихся нулей. В общей сложности (с тремя перегородками-единицами) остается 10 позиций, из которых нужно выбрать 7 мест для нулей (или, то же самое, 3 места для единиц). Это $C_{10}^{7} = 120$

Примечание: условие допускало интерпретацию «ровно два апельсиновых и один персиковый». В этом случае остается 7 пакетов на яблочный и вишневые соки. В этом случае остается всего 8 вариантов.

Задание 1.2

Решение: пусть есть 4 корзины с соками: каждая для сока своего вкуса (в порядке упоминания в условии). Пусть 1 соответствует перегородке между этими корзинами, а 0 пакету сока. Тогда, например, комбинация 0000101001000 означает, что взяли 4 пакета апельсинового сока, 1 — яблочного, 2 — персикового и 3 — вишневого. Такие комбинации устанавливают однозначное соответствие со способами покупки. Нам необходимо, чтобы было хотя бы четыре апельсиновых сока и два персиковых. Таким образом остается распределить шесть оставшихся нулей. В общей сложности (с тремя перегородками-единицами) остается 9 позиций, из которых нужно выбрать 6 мест для нулей (или, то же самое, 3 места для единиц). Это $C_{9}^{6} = 84$

Примечание: условие допускало интерпретацию «ровно четыре апельсиновых и два персиковых». В этом случае остается 6 пакетов на яблочный и вишневые соки. В этом случае остается всего 7 вариантов.

Задание 2.1

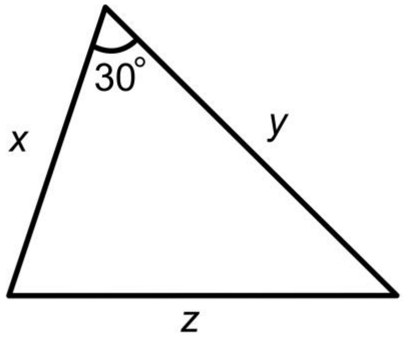
Решение: Пусть существуют хотя бы две плоскости, в которых лежат наши прямые. Пусть есть прямая a, которая пересекает прямую b и образует с ней плоскость α, а также прямая c, которая пересекает a и b в разных точках, и лежит в плоскости β. Если прямая c пересекает a в точке A, а прямую b в точке B, причем A и B различные, тогда в плоскости α лежат две точки, принадлежащие прямой c, а значит и вся прямая c лежит в α. Получили противоречие, значит больше одной плоскости не может быть, а в одной плоскости они все могут лежать, например это прямые, содержащие стороны 2023-угольника.

Задание 2.2

Решение: Пусть существуют хотя бы две плоскости, в которых лежат наши прямые. Пусть есть прямая a, которая пересекает прямую b и образует с ней плоскость α, а также прямая c, которая пересекает a и b в разных точках, и лежит в плоскости β. Если прямая c пересекает a в точке A, а прямую b в точке B, причем A и B различные, тогда в плоскости α лежат две точки, принадлежащие прямой c, а значит и вся прямая c лежит в α. Получили противоречие, значит больше одной плоскости не может быть, а в одной плоскости они все могут лежать, например это прямые, содержащие стороны 2024-угольника.

Задание 3.1

Решение: обозначим стороны как показано на рисунке. Запишем теорему косинусов для этого треугольника: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos30^\circ$



Преобразуем выражение справа дополнив первые два слагаемых до квадрата разности: $z^2 = (x-y)^2 + 2xy(1-cos30^\circ)$

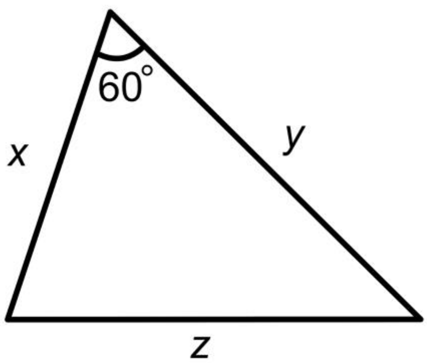
Выразим выражение xy через формулу площади для треугольника: $xy = \frac{2S}{sin30^\circ}$

Подставим в выражение $z^2 = (x-y)^2 + \frac{4S}{sin30^\circ}(1-cos30^\circ) = (x-y)^2 + 8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Правое слагаемое правой части фиксированное, а значит минимальное значение z^2 достигается если $x = y$, и равно $8 - 4\sqrt{3}$

Задание 3.2

Решение: обозначим стороны как показано на рисунке. Запишем теорему косинусов для этого треугольника: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos60^\circ$



Преобразуем выражение справа дополнив первые два слагаемых до квадрата разности: $z^2 = (x-y)^2 + 2xy(1-cos60^\circ)$

Выразим выражение xy через формулу площади для треугольника:

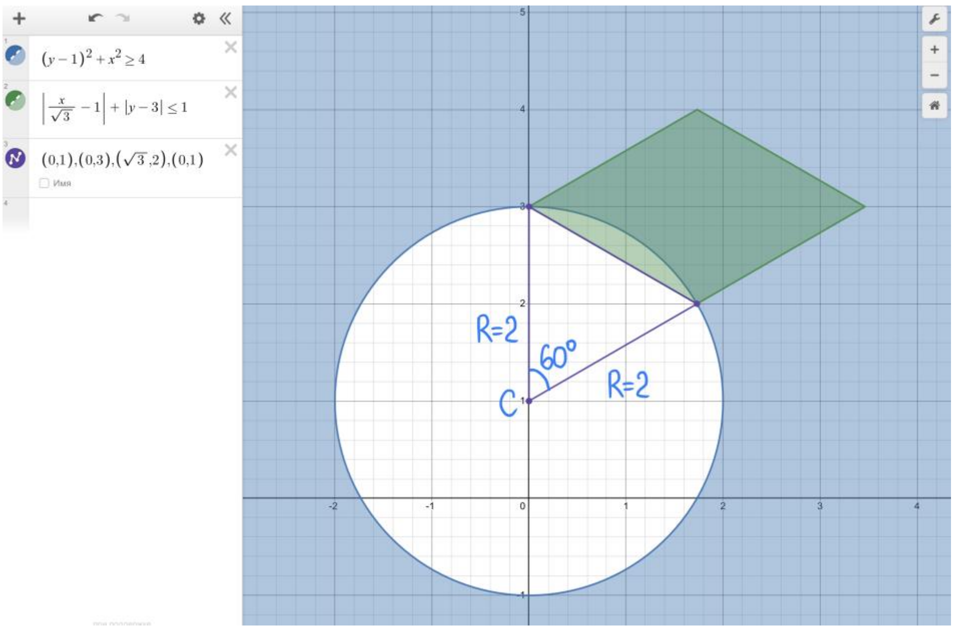
$xy = \frac{2S}{sin60^\circ}$

Подставим в выражение $z^2 = (x-y)^2 + \frac{4S}{sin60^\circ}(1 - cos60^\circ) = (x-y)^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}$

Правое слагаемое правой части фиксированное, а значит минимальное значение z^2 достигается если $x = y$, и равно $\frac{8}{\sqrt{3}}$

Задание 4.1

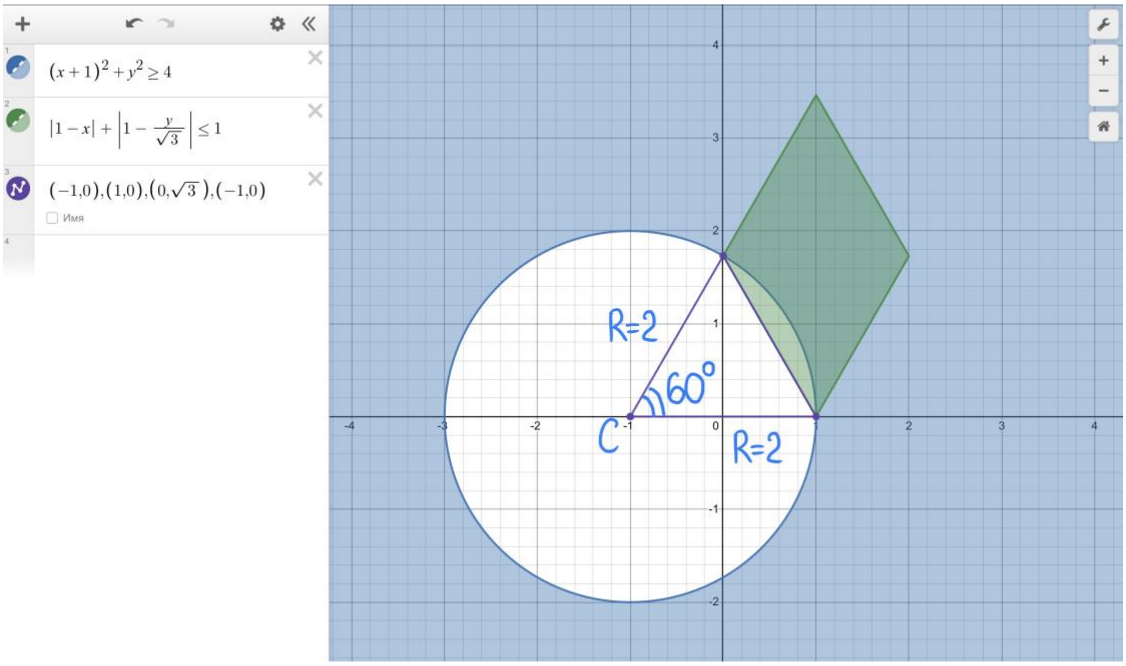
Решение: Первое множество — ромб с вершинами (0;3), ($\sqrt{3}$;4), ($2\sqrt{3}$;3), ($\sqrt{3}$;2). Второе — внешность круга с центром в точке (0;1) и радиусом 2. Фигура Ф: — ромб за вычетом части этого круга, ограниченной хордой — стороной ромба.



Площадь ромба равна $2\sqrt{3}$. Площадь части круга, ограниченной хордой, может быть найдена как разность площадей кругового сектора (угол) и треугольника с вершинами (0;1), (0;3) и ($\sqrt{3}$;2) (он равносторонний, угол C равен 60°). Получается $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$. Итого, искомая площадь фигуры Ф: $S = 2\sqrt{3} - \left[\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right] = 3\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$

Задание 4.2

Решение: Первое множество — ромб с вершинами (0;$\sqrt{3}$), (1;2$\sqrt{3}$), (2;$\sqrt{3}$), (1;0). Второе — внешность круга с центром в точке (-1;0) и радиусом 2. Фигура Ф: — ромб за вычетом части этого круга, ограниченной хордой —



стороной ромба.

Площадь ромба равна $2\sqrt{3}$. Площадь части круга, ограниченной хордой, может быть найдена как разность площадей кругового сектора (угол) и треугольника с вершинами (-1;0), (0;$\sqrt{3}$) и (1;0) (он равносторонний, угол С равен 60°). Получается $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$. Итого, искомая площадь фигуры Ф: $S = 2\sqrt{3}-\left[\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right] = 3\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

Задание 5.1

Решение: Заметим, что данная система является симметричной относительно замены мест x и y. Пусть $x+y=a, xy=b$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} a^2 - 4b = az, \\ 4b - 1 = 4z, \\ a^2 - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4z - 1 = az, \\ a^2 - z = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 4a^2 + 4 - 1 = a^3 - a \Rightarrow a = -1; a = 1; a = -3$

Таким образом решения новой системы: $\left(1, \frac{1}{4}, 0\right), \left(-1, \frac{1}{4}, 0\right), \left(-3, \frac{33}{4}, 8\right)$

Возвращаясь к старым переменным находим итоговый ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

Задание 5.2

Решение: Заметим, что данная система является симметричной относительно замены мест z и y. Пусть $y + z = a, yz = b$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} a^2 - 4b = ax, \\ 4b = 4x + 1, \\ a^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4x - 1 = ax, \\ a^2 - x = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 4a^2 + 4 - 1 = a^3 - a \Rightarrow a = -1; a = 1; a = -3$

Таким образом решения новой системы: $\left(1, \frac{1}{4}, 0\right), \left(-1, \frac{1}{4}, 0\right), \left(-3, \frac{33}{4}, 8\right)$

Возвращаясь к старым переменным находим итоговый ответ: $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Задание 6.1

Решение: функция в левой части уравнения определена всюду и монотонно убывает. Таким образом уравнение всегда будет иметь решение (и оно единственное), если правая часть существует. Значит, $a \in [-2; 2]$

Задание 6.2

Решение: функция в левой части уравнения определена всюду и монотонно убывает. Таким образом уравнение всегда будет иметь решение (и оно единственное), если правая часть существует. Значит, $a \in [-3; 3]$