Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 11 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2023/24

1 ноя 2023 г., 10:00 — 20 ноя 2023 г., 23:59

№ 1, вариант 1

5 баллов

В выпуклом семиугольнике наугад выбирают две различные диагонали. Какая вероятность, что они не имеют общих точек?

2/13

№ 1, вариант 2

5 баллов

В выпуклом восьмиугольнике наугад выбирают две различные диагонали. Какая вероятность, что они не имеют общих точек?

4/19

№ 2, вариант 1

5 баллов

Сколько целых значений x удовлетворяют неравенству

$$\frac{arcsin\dfrac{x^2}{4} - arcsin\dfrac{x}{8}}{(2x^3+2x+1)(log_{9x}(x^2-3))} \leqslant 0?$$

0

№ 2, вариант 2

5 баллов

Сколько целых значений x удовлетворяют неравенству

$$\frac{arccos\frac{x^2}{4} - arccos\frac{x}{8}}{(x^3 + x + 1)(log_{3x}(x^2 - 3))} \geqslant 0?$$

0

№ 3, вариант 1

10 баллов

Решите уравнение

$$\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = \log_2^2\left(\frac{5}{4} - x\right) + \sqrt{2} \cdot 3^{|x-0.25|}$$

0.25

№ 3, вариант 2

10 баллов

Решите уравнение

$$3\sin(\pi x) - 3\cos(\pi x) = \left|\frac{3}{4} - x\right| + 3\sqrt{2} \cdot 2^{|x-0.75|}$$

0.75

№ 4, вариант 1

10 баллов

Дана правильная призма, в основании которой лежит равносторонний треугольник. Известно, что периметр боковой грани 8. Чему равна сторона основания такой призмы с наибольшим объёмом из возможных?

8/3

№ 4, вариант 2

10 баллов

Дана правильная призма, в основании которой лежит равносторонний треугольник. Известно, что периметр боковой грани 4. Чему равна сторона основания такой призмы с наибольшим объёмом из возможных?

4/3

№ 5, вариант 1

35 баллов

Найдите площадь фигуры Ф, которая задана неравенством: $log_{(|x|+|y|-2)}(x^2+y^2-4y+4) \leqslant 0$.
Примечание: площади «открытых» и «замкнутых» фигур считать одинаковым образом, например, площади кругов $x^2+y^2<1$ и $x^2+y^2 \leqslant 1$ одинаковы и равны π.
Ответ записать в виде десятичной дроби, учитывая, что $\pi = 3{,}14$.

8.785

№ 5, вариант 2

35 баллов

Найдите площадь фигуры Ф, которая задана неравенством: $log_{(|x|+|y|-2)}(x^2-6x+9+y^2) \leqslant 0$.
Примечание: площади «открытых» и «замкнутых» фигур считать одинаковым образом, например, площади кругов $x^2+y^2<1$ и $x^2+y^2 \leqslant 1$ одинаковы и равны π.
Ответ записать в виде десятичной дроби, учитывая, что $\pi = 3{,}14$.

11.57

№ 6, вариант 1

35 баллов

При каких значениях параметра a уравнение $x^2-4x+a = cos(2\pi x) + sin^2(3\pi x)$ имеет нечётное число решений.

5

№ 6, вариант 2

35 баллов

При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 4x + a = cos(3\pi x) - tg^2(2\pi x)$ имеет нечётное число решений.

5

Задание 1.1

Решение: всего диагоналей $\frac{7\cdot 4}{2}=14$ (из каждой из семи точек можно провести 4 диагонали, при этом каждую диагональ мы учтем дважды). Значит пар диагоналей: $C_{14}^2=91$. Число подходящих пар равно 91-{число пар пересекающихся диагоналей}-{число пар смежных диагоналей}. Число пересекающихся диагоналей равно числу четырехугольников, равно $C_7^4=35$. Число смежных диагоналей равно $7\cdot C_4^2=42$ (для каждой из 7 вершин выбираем 2 из 4 выходящих из нее диагонали). Значит подходящих пар: 91-35-42=14. Искомая вероятность: 14/91=2/13

Задание 1.2

Решение: всего диагоналей $\frac{8\cdot 5}{2}=20$ (из каждой из восьми точек можно провести 5 диагоналей, при этом каждую диагональ мы учтем дважды). Значит пар диагоналей: $C_{20}^2=190$. Число подходящих пар равно 190-{число пар пересекающихся диагоналей}-{число пар смежных диагоналей}. Число пересекающихся диагоналей равно числу четырехугольников, равно $C_8^4=70$. Число смежных диагоналей равно $8\cdot C_5^2=80$ (для каждой из 8 вершин выбираем 2 из 5 выходящих из нее диагонали). Значит подходящих пар: 190-70-80=40. Искомая вероятность: 40/190=4/19

Задание 2.1

Решение: В ОДЗ неравенства: $x\in\left(\sqrt{3};2\right)$ многочлен в знаменателе строго положителен. К остальным частям применяем метод рационализации, получим: $\frac{\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}\right)(9x-1)}{x^2-4}\le 0$. Методом интервалов (или заметив, что в ОДЗ числитель положителен, а знаменатель отрицателен), получаем, что решением является ОДЗ неравенства.

Задание 2.2

Решение: В ОДЗ неравенства: $x \in \left(\sqrt{3}; 2\right)$ многочлен в знаменателе строго положителен. К остальным частям применяем метод рационализации, получим: $\frac{\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}\right)(3x-1)}{x^2-4} \leq 0$. Методом интервалов (или заметив, что в ОДЗ числитель положителен, а знаменатель отрицателен), получаем, что решением является ОДЗ неравенства.

Задание 3.1

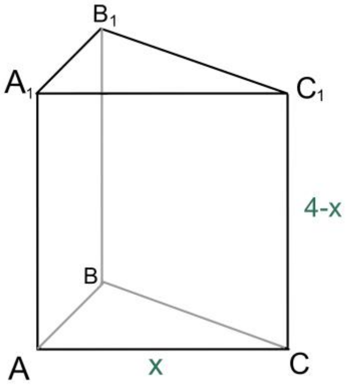
Решение: выражение в левой части не превосходит $\sqrt{2}$. Выражение в правой части, наоборот, больше или равно $\sqrt{2}$. Равенство возможно только в случае, если обе части равны $\sqrt{2}$. В случае правой части это будет только при $x = \frac{1}{4}$. Это значение подходит и для левой части, это ответ.

Задание 3.2

Решение: выражение в левой части не превосходит $3\sqrt{2}$. Выражение в правой части, наоборот, больше или равно $3\sqrt{2}$. Равенство возможно только в случае, если обе части равны $3\sqrt{2}$. В случае правой части это будет только при $x = \frac{3}{4}$. Это значение подходит и для левой части, это ответ.

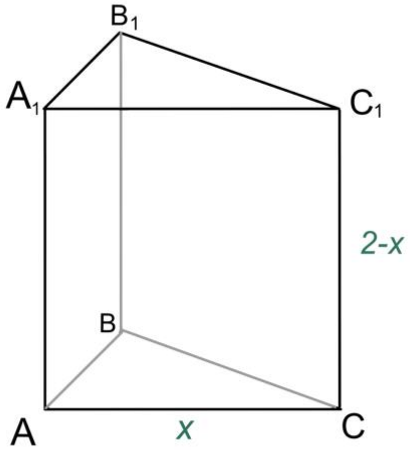
Задание 4.1

Решение: Пусть сторона основания равна x. Тогда из периметра боковой грани боковое ребро будет равно $4 - x$. Объем призмы $V = S(ABC) \cdot h$. $S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, а высота призмы равна боковому ребру $4 - x$. Тогда $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot (4 - x)$. Чтобы найти наибольшее значение V, посчитаем производную и найдем максимум при $x \in (0; 4)$. $V' = 2\sqrt{3}x - \frac{3}{4}\sqrt{3}x^2$. Максимум достигается при $x = \frac{8}{3}$.



Задание 4.2

Решение: Пусть сторона основания равна x. Тогда из периметра боковой грани боковое ребро будет равно $2-x$. Объем призмы $V=S(ABC)\cdot h$. $S(ABC)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, а высота призмы равна боковому ребру $2-x$. Тогда $V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot(2-x)$. Чтобы найти наибольшее значение V, посчитаем производную и найдем максимум при $x\in(0;2)$. $V'=\sqrt{3}x-\frac{3}{4}\sqrt{3}x^2$. Максимум достигается при $x=\frac{4}{3}$.



Задание 5.1

Решение: по методу рационализации в ОДЗ ($|x|+|y|>2, |x|+|y|\neq 3$), получаем $\frac{x^2+(y-2)^2-1}{|x|+|y|-3}\leq 0$. С учетом ОДЗ фигура Ф представлена на картинке: ее площадь равна $8+\frac{\pi}{4}$

Задание 5.2

Решение: по методу рационализации в ОДЗ ($|x|+|y|>2, |x|+|y|\neq 3$), получаем $\frac{(x-3)^2+y^2-1}{|x|+|y|-3}\leq 0$. С учетом ОДЗ фигура Ф представлена на картинке: ее площадь равна $10+\frac{\pi}{2}$

Задание 6.1

Решение: данное уравнение является симметричным относительно $x=2$ (относительно замены $x\to 4-x$). Нечетное число решений будет в случае, когда среди решений содержится центр симметрии $x=2$. Подставляя это значение, получаем: $a=5$

Задание 6.2

Решение: данное уравнение является симметричным относительно $x=2$ (относительно замены $x\to 4-x$). Нечетное число решений будет в случае, когда среди решений содержится центр симметрии $x=2$. Подставляя это значение, получаем: $a=5$