ММО-2025, 11 класс, первый день

Задача 1. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 100 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено? (*М. Евдокимов*)

Решение. Пусть на симпозиуме n лжецов и $100-n$ правдолюбов. По условию $1 \leqslant n \leqslant 99$. Посмотрим на какого-нибудь лжеца и какого-нибудь правдолюба. Если они знакомы, то правдолюб скажет «да», а если незнакомы, то лжец скажет «да». В любом случае будет ровно один ответ «да» для каждой такой пары, а всего пар $n(100-n)$. Минимальное значение этого выражения равно 99 и достигается при $n=1$ или $n=99$. Таким образом, в любом случае будет не менее 99 ответов «да». Пример, когда это значение достигается: 99 лжецов и 1 правдолюб, и все друг с другом знакомы.

Ответ: 99.

Задача 2. Дана последовательность $a_n = n!\,(n^2-2025n+1)$ для всех натуральных n. Найдите сумму первых 2025 членов этой последовательности. (*М. Лисицын*)

Решение. *Первый способ.* Представим a_n в виде

$$a_n = n!\big((n+1)(n+2)-(n+1)-2027n\big) = (n+2)!-(n+1)!-2027n\cdot n! =$$
$$= \big((n+2)!-(n+1)!\big)-2027\big((n+1)!-n!\big).$$

Тогда получаем

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2025} = (2027!-2!)-2027\cdot(2026!-1!) = 2025.$$

Второй способ. Перейдём к более общей задаче: будем рассматривать последовательности $a_{k,n} = n!(n^2-kn+1)$, где k — фиксированное натуральное число, а n — номер члена последовательности, и искать сумму первых k членов таких последовательностей.

При $k=1$ получаем, что сумма равна $a_{1,1} = 1!(1-1+1) = 1$.

При $k=2$ получаем, что сумма равна $a_{2,1}+a_{2,2} = 1!(1-2+1)+2!(4-4+1) = 2$. Аналогично можно получить, что при $k=3$ сумма равна 3. Возникающую гипотезу о том, что при произвольном k искомая сумма равна k, нужно строго доказать. Это можно сделать методом математической индукции.

База индукции уже проверена. Из предположения о том, что $a_{k,1}+a_{k,2}+a_{k,3}+\ldots+a_{k,k} = k$, требуется вывести $a_{k+1,1}+a_{k+1,2}+a_{k+1,3}+\ldots+a_{k+1,k+1} = k+1$. Заметим, что

$$a_{k+1,n} = n!(n^2-(k+1)n+1) = n!(n^2-kn+1-n) = a_{k,n}-n!n = a_{k,n}-n!((n+1)-1) = a_{k,n}-(n+1)!+n!.$$

Следовательно,

$$a_{k+1,1}+a_{k+1,2}+a_{k+1,3}+\ldots+a_{k+1,k+1} = a_{k,1}+a_{k,2}+a_{k,3}+\ldots+a_{k,k}-((k+1)!-1!)+$$
$$+(k+1)!\,\big((k+1)^2-(k+1)(k+1)+1\big) = k-(k+1)!+1+(k+1)! = k+1,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: 2025.

Задача 3. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Все боковые рёбра одной пирамиды параллельны соответствующим боковым граням другой. Докажите, что объём одной пирамиды вдвое больше объёма другой. (*М. Евдокимов*)

Решение. *Первый способ.* Пусть рёбра SA, SB, SC параллельны граням BCR, ACR и ABR соответственно. Проведём через SA, SB, SC плоскости, которые параллельны BCR, ACR и ABR соответственно. Получается параллелепипед, пять вершин которого совпадают с вершинами наших пирамид (рис. 1). Пусть V — объём этого параллелепипеда. Тогда объём пирамиды $RABC$ равен $V/6$, как и объём трёх других пирамид, основаниями которых являются грани тетраэдра $SABC$. Поэтому объём пирамиды $SABC$ равен $V - 4 \cdot V/6 = 2 \cdot V/6$, т. е. вдвое больше объёма пирамиды $RABC$, что и требовалось доказать.

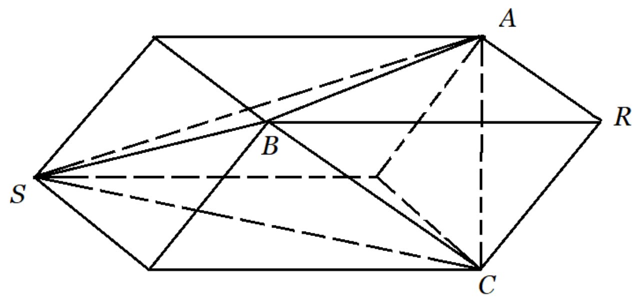

Рис. 1

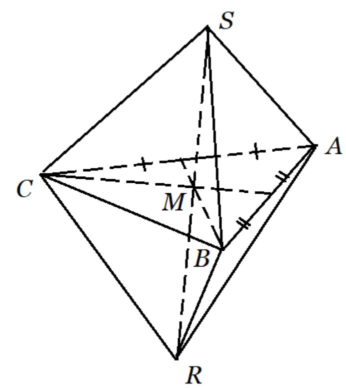

Рис. 2

Второй способ. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 2). Пусть α, β, γ — плоскости, проходящие через точки A, B, C, параллельные плоскостям BCR, ACR, ABR, соответственно. Поскольку $SA \parallel BCR$, точка S лежит в плоскости α. Аналогично, она лежит и в плоскостях β и γ. Пусть R' — образ точки R при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2. При этой гомотетии середина отрезка BC переходит в A, поэтому плоскость BCR переходит в плоскость α. Значит, $R' \in \alpha$. Аналогично, $R' \in \beta$ и $R' \in \gamma$. Плоскости ABR, BCR, ACR имеют единственную общую точку, поэтому их образы α, β, γ при рассматриваемой гомотетии тоже имеют единственную общую точку. Таким образом, получаем, что $R' = S$. По построению точки R' расстояние от неё до плоскости ABC в два раза больше, чем расстояние от R до этой плоскости, поэтому объём пирамиды $R'ABC$ (она же $SABC$) вдвое больше объёма пирамиды $RABC$.

Задача 4. Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n, что $f(m)$ не делится на n, но $f\left(p^k\right)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k? (*А. Волостнов, С. Гришин*)

Решение. Приведём несколько примеров таких многочленов.

1) Пусть $f(x) = (x-2)(x-4)^2(x+1)^5$, $m = 6$, $n = 32$. Проверим, что $f(6)$ не делится на 32. Действительно, $f(6) = 4 \cdot 2^2 \cdot 7^5 = 16 \cdot 7^5$ не делится на 32. Теперь проверим, что $f\left(p^k\right)$ делится на 32 для любого простого числа p и любого натурального k. Если $p^k = 2$ или $p^k = 4$, то многочлен тождественно равен 0. Для $p^k = 2^k$, где $k \geqslant 3$, имеем

$$f(2^k) = (2^k-2)(2^k-4)^2(2^k+1)^5 = 32(2^{k-1}-1)(2^{k-2}-1)(2^k+1)^5.$$

Наконец, если простое число p нечётно (а значит, и p^k нечётно), то $f(p^k)$ делится на 32, так как при любом нечётном $s = 2l - 1$ значение $f(s)$ делится на $(s+1)^5 = (2l)^5$, а значит, и на 32.

2) Пусть $f(x) = x^{18}(3x - x^2) + x^2 - 3x$, $m = 6$, $n = 27$. Сначала проверим, что $f(p^k)$ делится на 27 при всех простых p и натуральных k.

Начнём со случая $p = 3$. Заметим, что первое слагаемое делится на 3^{18}, а значит, и на 27. Остаётся проверить, что $x(x - 3)$ делится на 27 для чисел вида 3^k, где $k \geqslant 1$. При $k = 1$ и $k = 2$ это проверяется непосредственно; при $k \geqslant 3$ число $3^k(3^k - 3)$ также делится на 27.

Теперь проверим утверждение для простых чисел $p \neq 3$. В этом случае p^k взаимно просто с n, а значит, достаточно доказать утверждение «$f(s)$ кратно n при любом s, взаимно простом с n». Для этого заметим, что при всех таких s по теореме Эйлера выполняется соотношение $s^{18} = s^{\varphi(27)} \equiv 1 \pmod{27}$, а тогда $x^{18}(3x - x^2) + x^2 - 3x \equiv (3x - x^2) + x^2 - 3x \equiv 0 \pmod{27}$.

Остаётся проверить, что $f(6)$ не делится на 27. Для этого снова заметим, что число 6^{18} делится на 27, а число $6^2 - 3 \cdot 6 = 18$ не делится на 27.

Другое решение. Пусть $q \geqslant 2$ — простое, $m = 2q$, $n = q^3$, и пусть $r_1, r_2, \ldots, r_t$ — все не кратные q натуральные числа, меньшие q^3. Положим $f(x) = x(x-q) \cdot (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_t)$. Действительно, тогда $f(m) = q^2 \cdot 2 \cdot (2q - r_1)(2q - r_2)\ldots(2q - r_t)$ не кратно q^3. При $p \neq q$ число p^k имеет остаток от деления на q^3, не кратный q, поэтому один из множителей в определении $f(x)$ будет кратен q^3 при $x = p^k$. При $p = q$ и $k \geqslant 2$ уже число $p^k(p^k - q)$ будет кратно q^3. Наконец, при $p = q$, $k = 1$ значение $f(p^1) = 0$ делится на q^3.

Ответ: существует.

Замечание. Если добавить условие взаимной простоты чисел n и m, то ответ к задаче изменится на противоположный. Действительно, предположим, что такое m нашлось. Нетрудно видеть, что в качестве n всегда можно брать степень простого числа. Действительно, если $f(m)$ не делится на n, то оно не делится и на q^l для некоторого простого q, для которого $n = bq^l$. В то же время из равенства $f(p^k) \equiv 0 \pmod{n}$ следует аналогичное равенство и для q^l. Если существует простое число r вида $q^l y + m$, то для него выполняются сравнения $0 \equiv f(r) \equiv f(m) \pmod{q^l}$. Существование такого простого числа следует из известной в теории чисел *теоремы Дирихле* о простых числах в арифметической прогрессии. Она утверждает, что в любой арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d, где натуральные числа a и d взаимно просты, найдётся бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы выходит далеко за рамки школьной программы.

Задача 5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$. (*А. Доледенок*)

Решение. Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что $\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90^\circ - \angle QB_1H$. Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой 90° (рис. 4), то есть искомая сумма будет равна 270°.

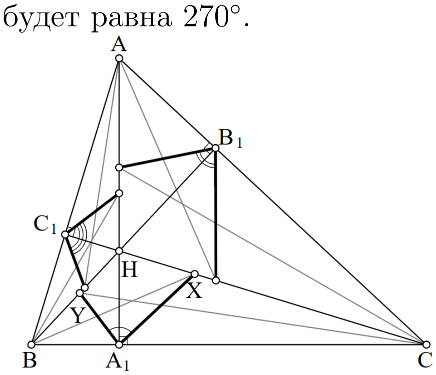

Рис. 3

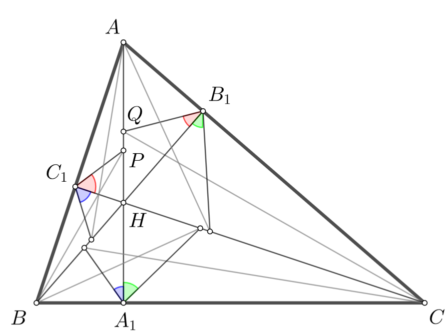

Рис. 4

Первый способ. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \tag{1}$$

Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC, а, следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Как известно, $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$, поэтому треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.

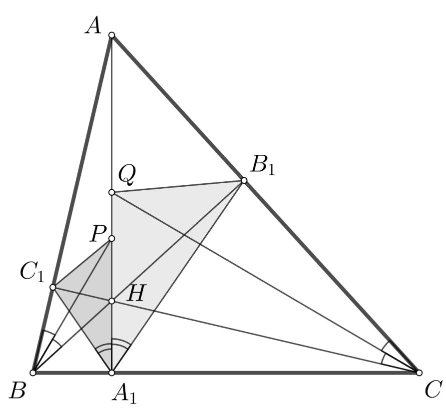

Рис. 5

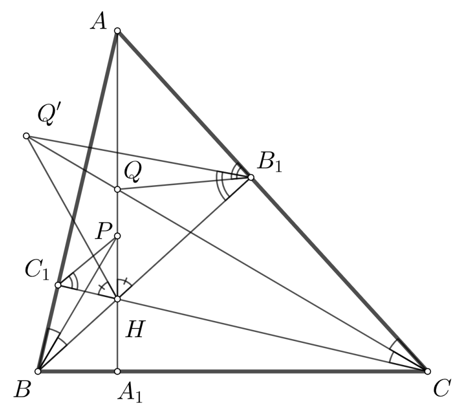

Рис. 6

Тогда

$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть Q' — точка, изогональная сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH. Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то точки P и Q' — соответствующие точки в подобных треугольниках BC_1H и CB_1H. Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.

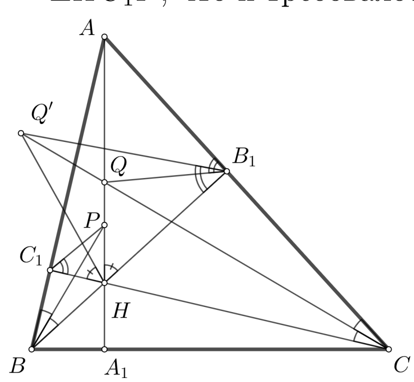

Рис. 7

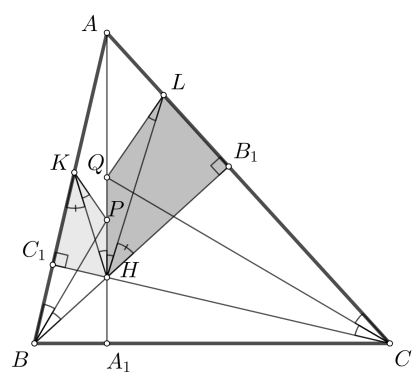

Рис. 8

Третий способ. Пусть K и L — точки пересечения описанных окружностей треугольников BHP и CHQ с прямыми AB и AC соответственно. Так как четырёхугольник $BHPK$ вписанный, то

$$\angle PKH = \angle PBH = \angle PBK = \angle PHK.$$

Так как четырёхугольник $CHQL$ вписанный, то

$$\angle QLH = \angle QCH = \angle QCL = \angle QHL.$$

Таким образом, треугольники KPH и HQL подобны по двум углам.

Поскольку четырёхугольник $BHPK$ вписанный, то $\angle BKP = \angle QHB_1$, поэтому

$$\angle C_1KH = \angle BKP - \angle HKP = \angle QHB_1 - \angle QHL = \angle LHB_1.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники KC_1H и HB_1L подобны по двум углам.

На гипотенузах KH и HL подобных треугольников KC_1H и HB_1L построены соответствующим образом подобные треугольники KPH и HQL. Следовательно, полученные четырёхугольники C_1HPK и B_1LQH подобны. Тогда диагонали C_1P и B_1Q образуют одинаковые углы с соответствующими сторонами C_1H и B_1L, то есть $\angle PC_1H = \angle QB_1L$, что и требовалось доказать.

Ответ. 270°.

Задача 6. Петя красит каждую клетку доски 22×22 в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на двухклеточные доминошки. Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше разноцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа разноцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.) (*А. Грибалко*)

Решение. Решим задачу для прямоугольника $2m \times 2n$, где m, n — произвольные натуральные числа. Мы докажем, что ответом является число $1 + (m-1)(n-1)$.

Сначала покажем, что Петя может раскрасить доску так, чтобы при любом разрезании Васи получилось не менее, чем $1 + (m-1)(n-1)$ разноцветных доминошек. Покрасим прямоугольник шахматным образом в синий и красный цвета так, чтобы левая нижняя клетка была красной. Пете достаточно добиться того, чтобы в чёрном многоугольнике было на $1 + (m-1)(n-1)$ больше синих клеток, чем красных. Действительно, тогда при любом разрезании на доминошки будет хотя бы $1 + (m-1)(n-1)$ доминошек, в которых есть синяя клетка чёрного многоугольника, но нет красной (так как в каждой доминошке ровно одна синяя и ровно одна красная клетка), все такие доминошки будут чёрно-белыми. Занумеруем строки снизу-вверх, а столбцы слева-направо. Добиться такого перевеса синих клеток в чёрном многоугольнике Петя может, например, покрасив в точности следующие клетки в чёрный цвет: все клетки первого столбца, в остальных стобцах с номерами дающими остаток 1 от деления на 4 — все клетки, кроме самой верхней, во всех столбцах с чётными номерами, кроме самого правого, — все синие клетки, во всех остальных столбцах — только самую нижнюю клетку (рис. 9). Действительно, тогда в первом столбце синих и красных клеток одинаковое количество, в остальных столбцах с нечётными номерами красных клеток на одну больше, чем синих, а в каждом чётном столбце, кроме последнего, синих клеток на m больше, чем красных, в последнем столбце синих на одну больше, чем красных, итого суммарно синих больше, чем красных, на $(n-1)m + 1 - (n-1) = 1 + (n-1)(m-1)$ клеток. При такой покраске как чёрные, так и белые клетки образуют многоугольник.

Теперь докажем, что как бы Петя ни раскрасил клетки, Вася сможет добиться того, чтобы разноцветных доминошек было не более, чем $1 + (m-1)(n-1)$. Назовём *каёмкой* множество всех клеток прямоугольника, прилегающих к границе. Достаточно доказать, что Вася всегда сможет разбить все клетки, отличные от клеток каёмки, на доминошки так, чтобы среди них было не более $(m-1)(n-1)$ разноцветных, и что он всегда сможет разрезать каёмку на доминошки так, чтобы среди них было не более одной разноцветной.

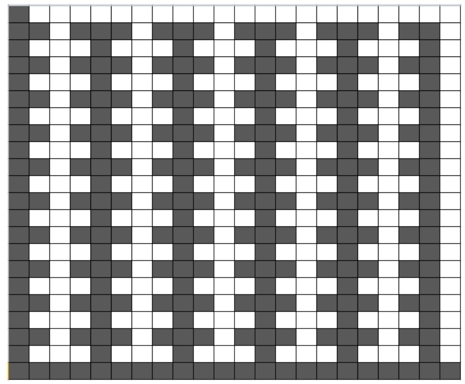

Рис. 9

Сначала докажем первое из этих утверждений. Пусть Вася разрежет образуемый не каёмочными клетками прямоугольник $(2m-2) \times (2n-2)$ на квадраты 2×2, а затем каждый квадрат порежет на доминошки так, чтобы среди них была хотя бы одна одноцветная. Он действительно сможет так сделать, так как иначе какой-то квадрат 2×2 покрашен шахматным образом, но тогда все четыре ребра клетчатой плоскости, проходящие через его центр, являются граничными для белого многоугольника, что невозможно. Таким образом, из этой части прямоугольника Вася получит не более $(m-1)(n-1)$ разноцветных доминошек.

Теперь докажем второе утверждение. Для этого достаточно доказать, что белые клетки каёмки образуют связное по сторонам множество клеток. Действительно, тогда в каёмке белые клетки представляют собой несколько последовательных клеток, и Вася может порезать всю каёмку на доминошки, порезав при этом всю белую часть на доминошки, за исключением, возможно, одной клетки (если в каёмке белых клеток нечётное количество). Таким образом, разрезав каёмку, Вася получит не более одной разноцветной доминошки.

Итак, докажем связность множества белых клеток каёмки. Клетки белого многоугольника образуют связное по сторонам множество клеток, поэтому достаточно доказать, что если между некоторыми двумя различными не соседними белыми клетками в каёмке есть путь γ по белым клеткам, не содержащий других клеток каёмки, то между ними есть и путь по белым клеткам каёмки, далее это и докажем. Клетки пути γ разбивают прямоугольник на две (необязательно связные по сторонам) части, между которыми нет путей по клеткам, не содержащих клеток пути γ. Значит, γ разбивает каёмку на две связные части, только в одной из которых могут быть чёрные клетки (так как чёрные клетки сами образуют связное по сторонам множество клеток, не содержащее клеток пути γ). Следовательно, одна из частей каёмки полностью белая, и поэтому между рассмотренными белыми клетками каёмки есть путь по белым клеткам каёмки.

Ответ. 101.

Замечание. Известное утверждение о том, что γ разбивает клетки прямоугольника на две такие части, что части каёмки лежат в разных частях прямоугольника, можно доказать, например, так: соединим отрезками центры соседних в γ клеток, центр начальной клетки соединим с серединой её стороны, лежащей на границе прямоугольника, аналогично поступим с конечной клеткой. Получилась ломаная γ', соединяющая две точки на границе прямоугольника и лежащая (за исключением этих двух точек) строго внутри прямоугольника. По следствию из *теоремы Жордана* эта ломаная разбивает прямоугольник на две части, и клетки каёмки, соседние с начальной клеткой, лежат в разных частях, так как ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих центр начальной клетки с центрами этих соседей, пересекает γ' ровно в одной точке, не являющейся вершиной ломаной γ'. Тогда между этими соседними с начальной клетками нет клетчатого пути, не имеющего общих клеток с γ, так как в противном случае ломаная, проходящая по центрам клеток, такого пути не пересекала бы γ'.