Задание 1.1 Известно, что 15-значное число состоит из пяти нулей, шести единиц и четырех двоек, причем никакие две двойки не стоят рядом. Сколько существует таких чисел?

Ответ: 159390

Решение: сначала расставим нули и единицы, всего таких цифр 11. Из 11 позиций нужно, например, выбрать места для пяти нулей, таких способов $C_{11}^{5} = 462$. Для двоек есть 12 возможных позиций (между уже стоящими цифрами, или по краям), чтобы выполнялось условие, что никакие две двойки не стоят рядом. Нужно выбрать из этих 12 позиций 4, таких способов $C_{12}^{4} = 495$. По правилу произведения получаем: $462 \cdot 495 = 228690$. Однако при таком способе подсчета учтены также числа, которые начинаются с нуля. Посчитаем количество таких «бракованных» чисел и вычтем из предыдущего результата. Для этого зафиксируем 0 в старшем разряде, тогда нулей и единиц уже 10, нужно выбрать, например, места для оставшихся четырех нулей. Таких способов 210. Для двоек остается 11 позиций (те же, что и в первом случае, кроме крайней левой – там зафиксирован 0). Нужно выбрать из этих 11 позиций 4, таких способов $C_{11}^{4} = 330$. Всего «бракованных» чисел $330 \cdot 210 = 69300$. Значит подходящих чисел $228690 - 69300 = 159390$.

Задание 1.2 Известно, что 16-значное число состоит из семи нулей, четырех единиц и пяти четверок, причем никакие две четверки не стоят рядом. Сколько существует таких чисел?

Ответ: 164340

Решение: сначала расставим нули и единицы, всего таких цифр 11. Из 11 позиций нужно, например, выбрать места для семи нулей, таких способов $C_{11}^{7} = 330$. Для четверок есть 12 возможных позиций (между уже стоящими цифрами, или по краям), чтобы выполнялось условие, что никакие две четверки не стоят рядом. Нужно выбрать из этих 12 позиций 5, таких способов

$C_{12}^5 = 792$. По правилу произведения получаем: $330 \cdot 792 = 261360$. Однако при таком способе подсчета учтены также числа, которые начинаются с нуля. Посчитаем количество таких «бракованных» чисел и вычтем из предыдущего результата. Для этого зафиксируем 0 в старшем разряде, тогда нулей и единиц уже 10, нужно выбрать, например, места для оставшихся шести нулей. Таких способов 210. Для четверок остается 11 позиций (те же, что и в первом случае, кроме крайней левой – там зафиксирован 0). Нужно выбрать из этих 11 позиций пять, таких способов $C_{11}^5 = 462$. Всего «бракованных» чисел $210 \cdot 462 = 97020$. Значит подходящих чисел $261360 - 97020 = 164340$.

Задание 2.1 В треугольнике DEF проведены высоты DD_1 и EE_1. O — центр описанной окружности. OF и D_1E_1 пересекаются в точке H. Найти FH, если $DF = 3\sqrt{2}, \angle F = 60°, \angle D = 45°$.

Ответ: 1,5

Решение: из прямоугольных треугольников $\triangle FDD_1, \triangle FEE_1$ получим:

$\cos\angle F = \dfrac{FD_1}{FD} = \dfrac{FE_1}{FE} \Rightarrow \triangle FE_1D_1 \sim \triangle FED$ (по двум пропорциональным сторонам и общему $\angle F$ между ними), коэффициент подобия: $k = \cos\angle F$.

Таким образом, $FD_1 = \cos\angle F \cdot DF = \cos 60° \cdot 3\sqrt{2} = 1{,}5\sqrt{2}$. Также из подобия треугольников: $\angle FDE = \angle FD_1H = 45°$.

По свойству ортоцентра H: $FH \perp E_1D_1 \Rightarrow \triangle FHD_1$ — равнобедренный и прямоугольный, по теореме Пифагора: $FH = 1{,}5$.

Задание 2.2 В треугольнике DEF проведены высоты DD_1 и EE_1. O — центр описанной окружности. OF и D_1E_1 пересекаются в точке H. Найти FH, если $DF = 5\sqrt{6}, \angle F = 45°, \angle D = 60°$.

Ответ: 7,5

Решение: из прямоугольных треугольников $\triangle FDD_1, \triangle FEE_1$ получим:

$\cos\angle F = \dfrac{FD_1}{FD} = \dfrac{FE_1}{FE} \;\Rightarrow\; \triangle FE_1D_1 \sim \triangle FED$ (по двум пропорциональным сторонам и общему $\angle F$ между ними), коэффициент подобия: $k = \cos\angle F$.

Таким образом, $FD_1 = \cos\angle F \cdot DF = \cos 45^\circ \cdot 5\sqrt{6} = 5\sqrt{3}$. Также из подобия треугольников: $\angle FDE = \angle FD_1H = 60^\circ$.

По свойству ортоцентра H: $FH \perp E_1D_1 \;\Rightarrow \triangle FHD_1$ — равнобедренный и прямоугольный, значит $FH = FD_1 \cdot \sin\angle FD_1H = 7{,}5$.

Задание 3.1 Сумма первых девятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из различных нечетных натуральных чисел, равна 627. Найти одиннадцатый член этой прогрессии.

Ответ: 35

Решение: из условия следует, что разность прогрессии (d) — натуральное четное число. Распишем сумму первых девятнадцати членов:

$S_{19} = \dfrac{2a_1 + 18d}{2} \cdot 19 = 627 \;\Leftrightarrow\; a_1 + 9d = 33$. Так как a_1 — тоже натуральное число, то единственный возможный для разности случай: $d = 2$. При этом $a_1 = 15, a_{11} = a_1 + 10d = 35$.

Задание 3.2 Сумма первых двадцати трех членов арифметической прогрессии, состоящей из различных четных натуральных чисел, равна 966. Найти пятый член этой прогрессии.

Ответ: 28

Решение: из условия следует, что разность прогрессии (d) — натуральное четное число. Распишем сумму первых двадцати трех членов:

$S_{19} = \dfrac{2a_1 + 22d}{2} \cdot 23 = 966 \;\Leftrightarrow\; a_1 + 11d = 42$. Так как a_1 — тоже натуральное число, то единственный возможный для разности случай: $d = 2$. При этом $a_1 = 20, a_5 = a_1 + 4d = 28$.

Задание 4.1 При каком наименьшем значении параметра a единственное решение имеет уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+15}=a$.

Ответ: 9

Решение: заметим, что функция в левой части строго возрастает в ОДЗ ($x \geqslant 1$). Ее наименьшее значение (а вместе с этим и наименьшее значение параметра a) достигается в $x=1$, и равно 9.

Задание 4.2 При каком наименьшем значении параметра a единственное решение имеет уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+34}=a$.

Ответ: 10

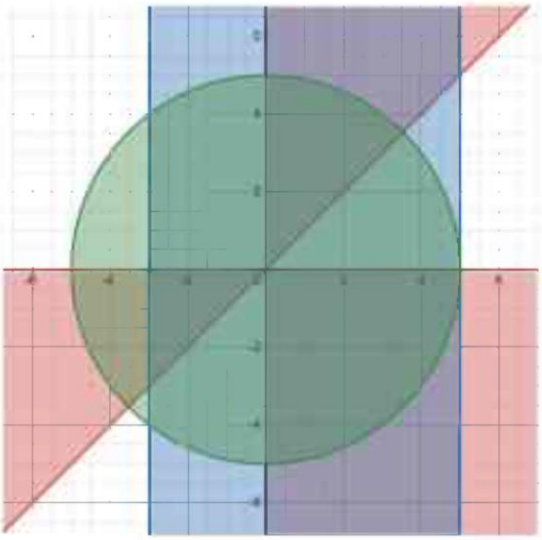
Решение: заметим, что функция в левой части строго возрастает в ОДЗ ($x \geqslant 2$). Ее наименьшее значение (а вместе с этим и наименьшее значение параметра a) достигается в $x=2$, и равно 10.

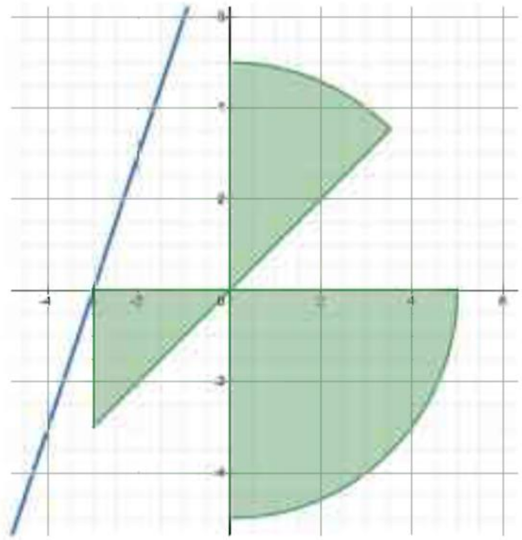
Задание 5.1 Найти $\max(y-3x)$, если $\begin{cases} |x+3|+|x-5| \leqslant 8, \\ x^2+y^2 \leqslant 25, \\ x(y-x)y \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: 9

Решение: изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой. Первое неравенство задает полосу между прямыми $x=-3$ и $x=5$. Второе множество — круг с центром в начале координат и радиусом 5. Третье множество задает четвертую четверть целиком, а также те части первой и третьей четвертей, которые лежат выше прямой $y=x$.

В пересечении остаются два угловых сектора круга, заданного вторым неравенством (целиком в четвертой четверти, и выше прямой $y=x$ в первой), а также прямоугольный треугольник с вершинами $(0;0),(-3;0),(-3;-3)$. Введем параметр $a=y-3x$. Наибольшее значение $y-3x$ равно наибольшему значению параметра a, при котором прямая $a=y-3x$ и построенное множество имеют общие точки. Это будет при прохождении прямой $a = y - 3x$ через точку $(-3; 0)$, таким образом $a = \max(y - 3x) = 9$.



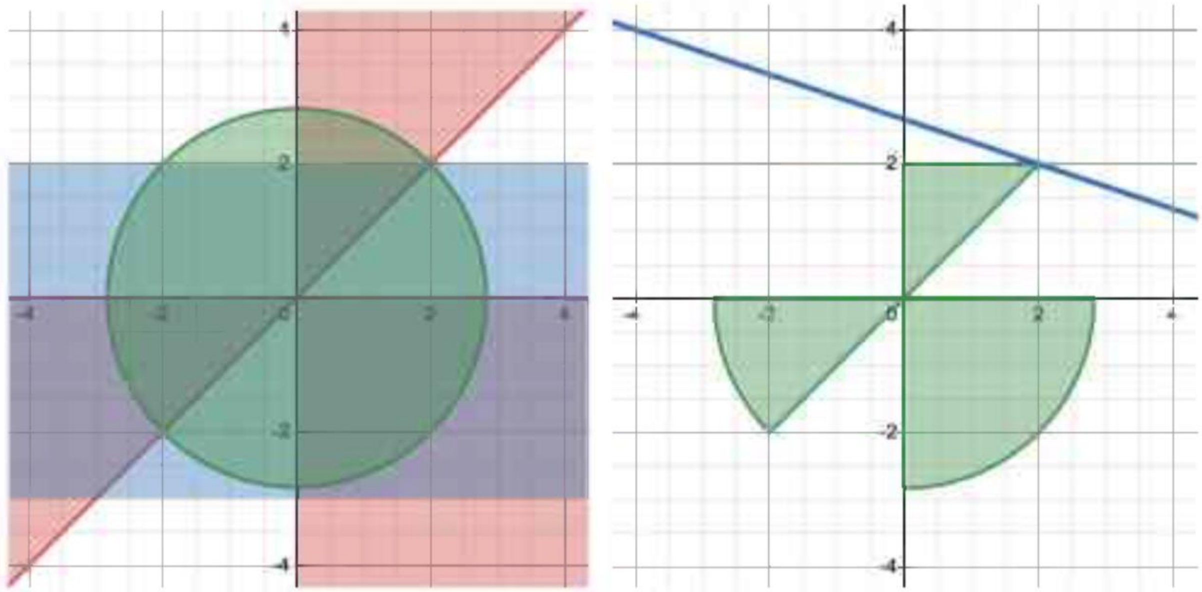


Задание 5.2 Найти $\max(x + 3y)$, если $\begin{cases} |y+3| + |y-2| \leqslant 5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 8, \\ x(y-x)y \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: 8

Решение: изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой. Первое неравенство задает полосу между прямыми $y = -3$ и $y = 2$. Второе множество — круг с центром в начале координат и радиусом $2\sqrt{2}$. Третье множество задает четвертую четверть целиком, а также те части первой и третьей четвертей, которые лежат выше прямой $y = x$.

В пересечении остаются два угловых сектора круга, заданного вторым неравенством (целиком в четвертой четверти, и выше прямой $y = x$ в третьей), а также прямоугольный треугольник с вершинами $(0; 0), (0; 2), (2; 2)$. Введем параметр $a = x + 3y$. Наибольшее значение $x + 3y$ равно наибольшему значению параметра a, при котором прямая $x + 3y$ и построенное множество имеют общие точки. Это будет при прохождении прямой $a = x + 3y$ через точку $(2; 2)$, таким образом $a = \max(x + 3y) = 8$.



Задание 6.1. Найти значения параметра p при котором уравнение $(x^2+x+1)^2=3x^2((p+1)x^2+x+1)$ имеет ровно три решения. В ответ запишите сумму этих значений.

Ответ: $-\dfrac{59}{48}$

Решение: представив $(p+1)x^2=px^2+x^2$, перепишем уравнение в виде $(x^2+x+1)^2-3x^2(x^2+x+1)-3px^4=0$. Разделим обе части на x^4, ($\neq 0$):

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)^2-3\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)-3p=0.$$ Положим $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}=t$.

Получаем квадратное уравнение: $t^2-3t-3p=0$. Из условия замены: $x^2+x+1=tx^2 \Leftrightarrow x^2(t-1)-x-1=0$. При $t=1$ это уравнение имеет единственное решение. При $t\neq 1$: $D=1+4(t-1)=4t-3$. При $t=\dfrac{3}{4}$ уравнение имеет единственный корень, при $t>\dfrac{3}{4}$ два различных корня.

Таким образом, чтобы решений было ровно три, квадратное уравнение

$t^2 - 3t - 3p = 0$ должно иметь два различных корня: $t_1 > \frac{3}{4}$ (этот корень даст два решения после возвращения к старой переменной), $t_2 = 1$ или $t_2 = \frac{3}{4}$.

Пусть $t_2 = 1$, тогда по теореме Виета, $t_1 + t_2 = 3$, $t_1 = 2 > \frac{3}{4}$ — подходит. При этом по теореме Виета: $t_1 \cdot t_2 = 2 = -3p \Rightarrow p = -\frac{2}{3}$.

Пусть $t_2 = \frac{3}{4}$, тогда по теореме Виета, $t_1 + t_2 = 3$, $t_1 = \frac{9}{4} > \frac{3}{4}$ — подходит. При этом по теореме Виета: $t_1 \cdot t_2 = \frac{27}{16} = -3p \Rightarrow p = -\frac{9}{16}$.

Сумма найденных значений параметра: $-\frac{2}{3} - \frac{9}{16} = -\frac{59}{48}$.

Задание 6.2. Найти значения параметра p при котором уравнение $(x^2 - x + 1)^2 = 3x^2(x^2 - x + 1 - 2px^2)$ имеет ровно три решения. В ответ запишите сумму этих значений.

Ответ: $\frac{59}{96}$

Решение: Перепишем уравнение в виде
$(x^2 - x + 1)^2 - 3x^2(x^2 - x + 1) + 6px^4 = 0$. Разделим обе части на x^4, $(\neq 0)$:

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right) + 6p = 0.$$ Положим $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = t$.

Получаем квадратное уравнение: $t^2 - 3t + 6p = 0$. Из условия замены:

$x^2 - x + 1 = tx^2 \Leftrightarrow x^2(t-1) + x - 1 = 0$. При $t = 1$ это уравнение имеет единственное решение. При $t \neq 1$: $D = 1 + 4(t-1) = 4t - 3$. При $t = \frac{3}{4}$ уравнение имеет единственный корень, при $t > \frac{3}{4}$ два различных корня.

Таким образом, чтобы решений было ровно три, квадратное уравнение $t^2 - 3t + 6p = 0$ должно иметь два различных корня: $t_1 > \frac{3}{4}$ (этот корень даст два решения после возвращения к старой переменной), $t_2 = 1$ или $t_2 = \frac{3}{4}$.

Пусть $t_2 = 1$, тогда по теореме Виета, $t_1 + t_2 = 3$, $t_1 = 2 > \frac{3}{4}$ — подходит. При этом по теореме Виета: $t_1 \cdot t_2 = 2 = 6p \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

Пусть $t_2 = \frac{3}{4}$, тогда по теореме Виета, $t_1 + t_2 = 3$, $t_1 = \frac{9}{4} > \frac{3}{4}$ — подходит. При этом по теореме Виета: $t_1 \cdot t_2 = \frac{27}{16} = 6p \Rightarrow p = \frac{9}{32}$.

Сумма найденных значений параметра: $\frac{1}{3} + \frac{9}{32} = \frac{59}{96}$.