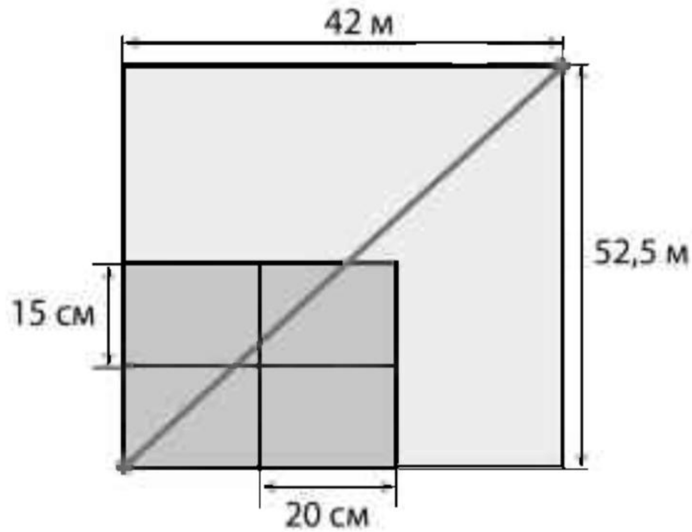
МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
8 класс

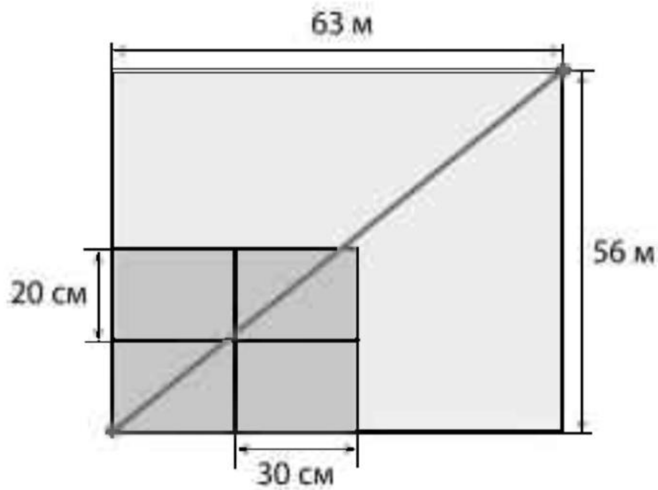
Задание 1.1 Площадь размерами 52,5 м на 42 м замостили прямоугольными плитками размерами 20 см на 15 см (см. рисунок). Затем из левого нижнего в правый верхний угол площади мелом провели диагональ. Сколько плиток затронет эта линия? (Примечание: считать, что граница плитки не является ее частью.)



Ответ: 490

Решение: с учетом размеров площади и плитки, по горизонтали помещается 210 плиток, а по вертикали – 350. Таким образом, диагональ пересечет 210 плиток по горизонтали (включая углы) и 350 плиток по вертикали (включая узлы). Получаем 560 плиток. Но при таком подсчете дважды учтены плитки, которые пересекаются диагональю в углах. Таких плиток столько, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\frac{15n}{20m} = \frac{525}{420} = \frac{5}{4}$, где $m = \overline{1,210}$. Получаем $n = \frac{5m}{3}$. Натуральных решений 70. Число дважды посчитанных плиток необходимо вычесть из ранее найденной суммы. Получается 560-70=490 плиток.

Задание 1.2 Площадь размерами 63 м на 56 м замостили прямоугольными плитками размерами 30 см на 20 см (см. рисунок). Затем из левого нижнего в правый верхний угол площади мелом провели диагональ. Сколько плиток затронет эта линия? (Примечание: считать, что граница плитки не является ее частью.)



Ответ: 420

Решение: с учетом размеров площади и плитки, по горизонтали помещается 210 плиток, а по вертикали – 280. Таким образом, диагональ пересечет 210 плиток по горизонтали (включая углы) и 350 плиток по вертикали (включая узлы). Получаем 490 плиток. Но при таком подсчете дважды учтены плитки, которые пересекаются диагональю в углах. Таких плиток столько, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\frac{20n}{30m} = \frac{56}{63} = \frac{8}{9}$, где $m = \overline{1,210}$. Получаем $n = \frac{4m}{3}$. Натуральных решений 70. Число дважды посчитанных плиток необходимо вычесть из ранее найденной суммы. Получается 490-70=420 плиток.

Задание 2.1 Точку K, лежащую внутри треугольника ABC и равноудаленную от сторон треугольника, соединили с вершинами A и C. Найти меньший угол между прямыми AK и CK, если $\angle B = 40^\circ$.

Ответ: 70

Решение: K — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC \Rightarrow AK, CK$ — биссектрисы. $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 140^\circ \Rightarrow \angle KAC + \angle KCA =$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 70^\circ \Rightarrow \angle AKC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Значит минимальный угол между AK и CK — угол, смежный с $\angle AKC \Rightarrow$ искомый угол равен $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Задание 2.2 Точку K, лежащую внутри треугольника ABC и равноудаленную от сторон треугольника, соединили с вершинами A и C. Найти меньший угол между прямыми AK и CK, если $\angle B = 140^\circ$.

Ответ: 20

Решение: K — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC \Rightarrow AK, CK$ — биссектрисы. $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 40^\circ \Rightarrow \angle KAC + \angle KCA =$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 20^\circ \Rightarrow \angle AKC = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

Значит минимальный угол между AK и CK — угол, смежный с $\angle AKC \Rightarrow$ искомый угол равен $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

Задание 3.1 Известно, что m и n — натуральные числа, связанные соотношением $3m^2n - m(n+3) = 2025$. Найти наибольшее возможное значение $m + n$.

Ответ: 1015

Решение: $3m^2n - m(n+3) = 2025 \Leftrightarrow 3m^2n - mn - 3m + 1 = 2026$

Группируя слагаемые получим: $mn(3m-1) - (3m-1) = 2026 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (mn-1)(3m-1) = 2 \cdot 1013.$$

Так как m, n — натуральные числа, то и оба сомножителя в левой части — натуральные (первый сомножитель не может равняться нулю из равенства) и с учетом того, что 2 и 1013 — простые числа, каждый из сомножителей может принимать только одно из четырех значений: 1, 2, 1013 или 2026. Так как m — натуральное число, выражение $3m-1$ дает остаток 2 при делении на 3. Значит для второго множителя остаются только варианты 2 и 1013. Если $3m-1=1013$, то $m=338$ и первый сомножитель $mn-1=338n-1 \geqslant 337$, не подходит. Значит, остается вариант: $3m-1=2$, при этом $m=1$, $mn-1=1013$, $n=1014$.

Задание 3.2 Известно, что a и b — натуральные числа, связанные соотношением $a^2b+a(b+2)-2024=0$. Найти наименьшее возможное значение $a+b$.

Ответ: 1012

Решение: $a^2b+a(b+2)-2024=0 \Leftrightarrow a^2b+ab+2a+2=2026$

Группируя слагаемые получим: $ab(a+1)+2(a+1)=2026 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ab+2)(a+1)=2\cdot 1013.$

Так как a, b — натуральные числа, то и оба сомножителя в левой части — натуральные и с учетом того, что 2 и 1013 — простые числа, каждый из сомножителей может принимать только одно из четырех значений: 1, 2, 1013 или 2026. Первый сомножитель очевидно больше второго, значит первый сомножитель равен либо 1013, либо 2026. Если $ab+2=2026$, то второй множитель равен 1, а значит $a=0$ — не подходит. Остается $ab+2=1013$, при этом $a+1=2$. Отсюда находим, что $a=1$, $b=1011$.

Задание 4.1 Найти сумму коэффициентов после раскрытия скобок в выражении $(2a+3b-7c)^6$.

Ответ: 64

Решение: для того что после раскрытия скобок найти сумму коэффициентов достаточно подставить в это выражение $a = 1, b = 1, c = 1$. Подставляя в исходное выражение, получаем $(2 + 3 - 7)^6 = 2^6 = 64$.

Задание 4.2 Найти сумму коэффициентов после раскрытия скобок в выражении $(2x - 5y + 6z)^5$.

Ответ: 243

Решение: для того что после раскрытия скобок найти сумму коэффициентов достаточно подставить в это выражение $x = 1, y = 1, z = 1$. Подставляя в исходное выражение, получаем $(2 - 5 + 6)^5 = 3^5 = 243$.

Задание 5.1 В числе $111 \cdot 2222 \cdot 33333$ переставили местами цифры. Какой наибольший остаток при делении на 9 может иметь новое число?

Ответ: 0

Решение: заметим, что исходное произведение делится на 9 (на 3 делятся первый и третий множители), а значит и сумма цифр в произведении делится на 9. После перестановки цифр сумма цифр не изменится, а значит и новое число делится на 9 нацело, остаток равен 0.

Задание 5.2 В числе $333 \cdot 2222 \cdot 11111$ переставили местами цифры. Какой наименьший остаток при делении на 9 может иметь новое число?

Ответ: 0

Решение: заметим, что исходное произведение делится на 9 (на 9 делится первый множитель), а значит и сумма цифр в произведении делится на 9. После перестановки цифр сумма цифр не изменится, а значит и новое число делится на 9 нацело, остаток равен 0.

Задание 6.1 Двадцатизначное число состоит из цифр 2, 5 и 8. На сколько восьмерок больше, чем двоек, если сумма цифр числа равна 109?

Ответ: на 3

Решение: пусть число двоек равно a, число пятерок — b, число восьмерок — c.

Тогда искомая величина равна $c - a$, при этом $\begin{cases} 2a + 5b + 8c = 109, \\ a + b + c = 20. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения системы второе, умноженное на 5, получим:

$-3a + 3c = 9$, значит $c - a = 3$

Задание 6.2 Тридцатизначное число состоит из цифр 4, 6 и 8. На сколько восьмерок больше, чем четверок, если сумма цифр числа равна 186?

Ответ: на 3

Решение: пусть число четверок равно a, число шестерок — b, число восьмерок — c.

Тогда искомая величина равна $c - a$, при этом $\begin{cases} 4a + 6b + 8c = 186, \\ a + b + c = 30. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения системы второе, умноженное на 6, получим:

$-2a + 2c = 6$, значит $c - a = 3$