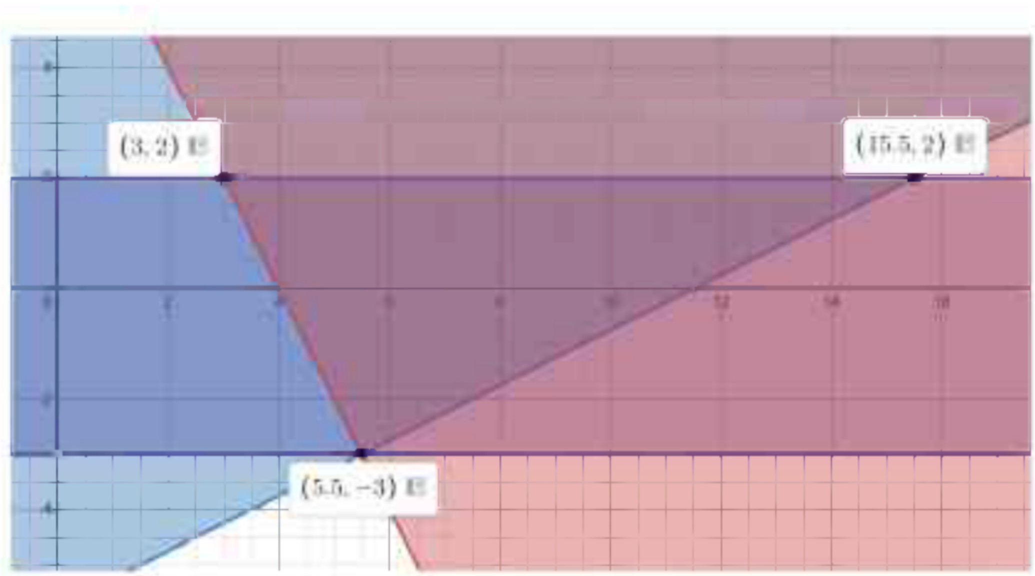
# МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
# МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
## 9 класс

**Задание 1.1** Фигура Ф задана системой неравенств: $\begin{cases} |y-2|+|y+3| \leqslant 5, \\ 2x-4y-23 \leqslant 0, \\ 2x+y-8 \geqslant 0. \end{cases}$

Найти диаметр наименьшего по площади круга, которым можно накрыть фигуру Ф целиком.

**Ответ:** 12,5

**Решение:** Множество, заданное первым неравенством – полоса, параллельная оси абсцисс, вторым и третьим — полуплоскости. В пересечении получается прямоугольный треугольник с вершинами $(5{,}5; -3)$, $(15{,}5; 2)$, $(3{,}2)$. Граница искомого круга – описанная около этого прямоугольного треугольника окружность. Диаметр в этом случае равен гипотенузе, то есть 12,5.

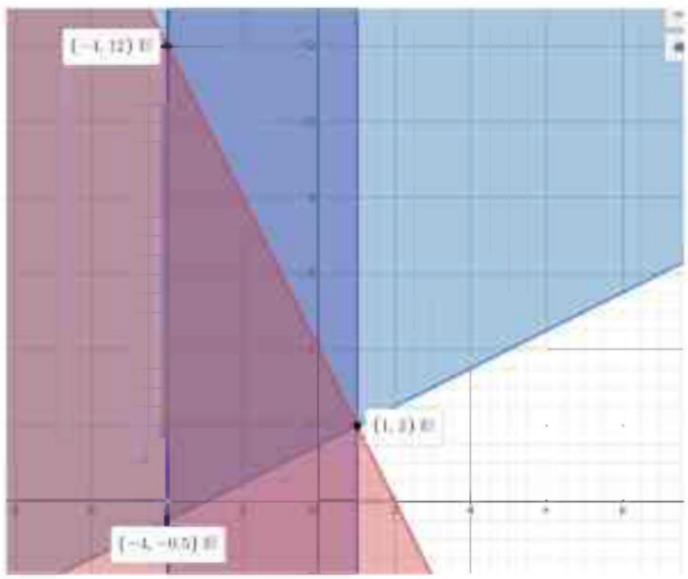



**Задание 1.2** Фигура Ф задана системой неравенств: $\begin{cases} |x-1|+|x+4| \leqslant 5, \\ 2x-4y+6 \leqslant 0, \\ 2x+y-4 \leqslant 0. \end{cases}$

Найти диаметр наименьшего по площади круга, которым можно накрыть фигуру Ф целиком.

**Ответ:** 12,5

**Решение:** Множество, заданное первым неравенством – полоса, параллельная оси ординат, вторым и третьим — полуплоскости. В пересечении получается прямоугольный треугольник с вершинами $(-4;0{,}5)$, $(-4;12)$, $(1{,}2)$. Граница искомого круга – описанная около этого прямоугольного треугольника окружность. Диаметр в этом случае равен гипотенузе, то есть 12,5.



**Задание 2.1** В параллелограмме $ABCD$ $(AB < BC)$ проведены биссектрисы соседних углов $A$ и $B$, которые пересекаются в точке $H$. $K$ — точка пересечения биссектрисы угла $A$ и диагонали $BD$, причем $BK : KD = 1 : 3$. Найти площадь треугольника $BHK$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

**Ответ:** 2

**Решение:** по свойству параллелограмма:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle HBA + \angle HAB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow B \triangle HBA : \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BH$. Пусть биссектриса $\angle A$ пересекает $BC$ в точке $L$, а биссектриса $\angle B$ пересекает $AD$ в точке $M$.

По свойству параллельных прямых:

$\angle CBM = \angle BMA \;\Rightarrow\; \angle ABM = \angle BMA \;\Rightarrow\; \triangle ABM$ — равнобедренный ($AB = AM$). Аналогично $\triangle ABL$ — равнобедренный ($AB = BL$), а значит $AM = BL$. Кроме того, в $\triangle ABM$ $AH$ — высота, значит $AH$ — медиана.

По свойству параллельных прямых: $\angle LBK = \angle KDA; \angle BLK = \angle KAD \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BKL \sim \triangle DKA$ по двум углам, коэффициент подобия: $k = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{1}{3}$,

значит $\dfrac{BL}{AD} = \dfrac{1}{3}$. Пусть: $BL = x, AD = 3x \;\Rightarrow\; AM = x \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; MD = AD - AM = 2x$.

$\dfrac{S_{BHK}}{S_{BMD}} = \dfrac{BH}{BM} \cdot \dfrac{BK}{BD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{S_{BMD}}{S_{ABD}} = \dfrac{MD}{AD} = \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$; $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$.

Таким образом: $\dfrac{S_{BHK}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{24} \;\Rightarrow\; S_{BHK} = \dfrac{1}{24} S_{ABCD} = 2$.

**Задание 2.2** В параллелограмме $ABCD$ ($AB < BC$) проведены биссектрисы соседних углов $A$ и $B$, которые пересекаются в точке $H$. $K$ — точка пересечения биссектрисы угла $A$ и диагонали $BD$, причем $BK : KD = 2 : 3$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника $BHK$ равна 3.

**Ответ:** 90

**Решение:** по свойству параллелограмма:

$\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle HBA + \angle HAB = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow B \triangle HBA : \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BH$. Пусть биссектриса $\angle A$ пересекает $BC$ в точке $L$, а биссектриса $\angle B$ пересекает $AD$ в точке $M$.

По свойству параллельных прямых:

$\angle CBM = \angle BMA \;\Rightarrow\; \angle ABM = \angle BMA \;\Rightarrow\; \triangle ABM$ — равнобедренный ($AB = AM$). Аналогично $\triangle ABL$ — равнобедренный ($AB = BL$), а значит $AM = BL$. Кроме того, в $\triangle ABM$ $AH$ — высота, значит $AH$ — медиана.

По свойству параллельных прямых: $\angle LBK = \angle KDA; \angle BLK = \angle KAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BKL \sim \triangle DKA$ по двум углам, коэффициент подобия: $k = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{2}{3}$,

значит $\dfrac{BL}{AD} = \dfrac{2}{3}$. Пусть: $BL = 2x, AD = 3x \Rightarrow AM = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow MD = AD - AM = x$.

$$\frac{S_{BHK}}{S_{BMD}} = \frac{BH}{BM} \cdot \frac{BK}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}; \quad \frac{S_{BMD}}{S_{ABD}} = \frac{MD}{AD} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}; S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Таким образом: $\dfrac{S_{BHK}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{30} \Rightarrow S_{ABCD} = 30S_{BHK} = 90$.

**Задание 3.1** Леша загадал квадратный трехчлен с целочисленными коэффициентами. Известно, что сумма квадратов его корней равна 4,25, а старший коэффициент и свободный член в сумме равны нулю. Кроме того, прямая $y = x - 2$ пересекает график соответствующей параболы в точках, абсциссы которых отличаются на 2. Найти значение этого квадратного трехчлена в точке $x = 5$.

**Ответ:** 33

**Решение:** пусть искомый квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a, b, c$ — целые

Тогда, во-первых, по теореме Виета получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = 4{,}25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4{,}25 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = 4{,}25.$$

Во-вторых, $c = -a$. С учетом первого пункта $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + 2 = 4{,}25 \Rightarrow b = \pm\dfrac{3}{2}a$

В-третьих, рассмотрим уравнение

$ax^2 + bx + c = x - 2 \Leftrightarrow ax^2 + (b-1)x + (c+2) = 0$. Из условия, $|x_1 - x_2| = 2$

По теореме Виета: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b-1}{a}\right)^2 - \frac{4(c+2)}{a} = 4.$$

С учетом того, что $c = -a$, $b = \pm\frac{3}{2}a$, получаем два уравнения, сводимых к квадратным:

1) $\left(\frac{1{,}5a-1}{a}\right)^2 - \frac{4(-a+2)}{a} = 4$

2) $\left(\frac{-1{,}5a-1}{a}\right)^2 - \frac{4(-a+2)}{a} = 4$

Единственное целочисленное решение этих уравнений: $a = 2$ (при $b = -\frac{3}{2}a$)

Таким образом, $c = -a = -2$, $b = -3$, а квадратный трехчлен: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. При $x = 5$ его значение равно 33.

**Задание 3.2** Леша загадал квадратный трехчлен с целочисленными коэффициентами. Известно, что сумма квадратов его корней равна 1,25, а коэффициент при $x$ и свободный член в сумме равны нулю. Кроме того, прямая $y = 5x - 1$ пересекает график соответствующей параболы в точках, абсциссы которых отличаются на 2. Найти значение этого квадратного трехчлена в точке $x = 4$.

**Ответ:** 35

**Решение:** пусть искомый квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a, b, c$ — целые

Тогда, во-первых, по теореме Виета получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1{,}25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1{,}25 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = 1{,}25.$$

Во-вторых, $b = -c$. С учетом первого пункта:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{2b}{a} = 1{,}25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ a = -\frac{2}{5}b \end{array}\right.$$

В-третьих, рассмотрим уравнение

$ax^2 + bx + c = 5x - 1 \Leftrightarrow ax^2 + (b-5)x + (c+1) = 0$. Из условия,

$|x_1 - x_2| = 2$

По теореме Виета: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b-5}{a}\right)^2 - \frac{4(c+1)}{a} = 4.$$

С учетом того, что $c = -b$, $a = 2b$ или $a = -\frac{2b}{5}$, получаем два уравнения, сводимых к квадратным:

1) $\left(\frac{b-5}{2b}\right)^2 - \frac{4(-b+1)}{2b} = 4$

2) $\left(\frac{b-5}{-0{,}4b}\right)^2 - \frac{4(-b+1)}{-0{,}4b} = 4$

Единственное целочисленное решение этих уравнений: $b = 1$ (при $a = 2b$) Таким образом, $c = -b = -1$, $a = 2$, а квадратный трехчлен: $f(x) = 2x^2 + x - 1$. При $x = 4$ его значение равно 35.

**Задание 4.1** Сколько существует сорокозначных чисел с суммой цифр семь, если известно, что оно при этом делится на 1000.

**Ответ:** 5245786

**Решение:** три последние цифры обязательно равны нулю, иначе не будет выполнено условие деления на 1000. Остается распределить 7 по 37 разрядам. Это сочетания с повторениями, число таких сочетаний: $\overline{C_{37}^7} = C_{43}^7 = 32224114$

При таком способе подсчета учтены также числа, которые начинаются с нуля. Посчитаем количество таких «бракованных» чисел и вычтем из предыдушего результата. Для этого зафиксируем 0 в старшем разряде, тогда остается распределить 7 уже по 36 разрядам. Это снова сочетания с повторениями, число таких сочетаний: $\overline{C_{36}^7} = C_{42}^7 = 26978328$. Вычитая из одного результата другой, получаем, что интересующих нас способов 5245786

**Задание 4.2** Сколько существует тридцатизначных чисел с суммой цифр восемь, если известно, что оно при этом делится на 100.

**Ответ:** 5379616

**Решение:** две последние цифры обязательно равны нулю, иначе не будет выполнено условие деления на 100. Остается распределить 8 по 28 разрядам. Это сочетания с повторениями, число таких сочетаний: $\overline{C_{28}^{8}} = C_{35}^{8} = 23535820$

При таком способе подсчета учтены также числа, которые начинаются с нуля. Посчитаем количество таких «бракованных» чисел и вычтем из предыдущего результата. Для этого зафиксируем 0 в старшем разряде, тогда остается распределить 8 уже по 27 разрядам. Это снова сочетания с повторениями, число таких сочетаний: $\overline{C_{27}^{8}} = C_{34}^{8} = 18156204$. Вычитая из одного результата другой, получаем, что интересующих нас способов 5379616

**Задание 5.1** Найти $\max(x+y+z)$, если известно, что $y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$ и $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2 = 0$.

**Ответ:** 2

Решение: рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $x$:

$4x^2 + 4x(y-z) + y^2 + z^2 - 2 = 0$.

**Его дискриминант:** $D = 16y^2 - 32yz + 16z^2 - 16y^2 - 16z^2 + 32 = 32 - 32yz$

С учетом того, что $y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$ дискриминант принимает неотрицательные значения только при $y = z = 1$. При этом получаем, что $x = 0$. Значит, $\max(x+y+z)$ =2.

**Задание 5.2** Найти $\min(x+y+z)$, если известно, что $y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2 = 0$.

**Ответ:** 2

Решение: рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $x$:

$x^2 + 2x(z-y) + y^2 + z^2 - 2 = 0$.

**Его дискриминант:** $D = 4z^2 - 8yz + 4y^2 - 4y^2 - 4z^2 + 8 = 8 - 8yz$

С учетом того, что $y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$ дискриминант принимает неотрицательные значения только при $y = z = 1$. При этом получаем, что $x = 0$. Значит, $\min(x + y + z) = 2$.

**Задание 6.1** На доске записаны два числа: 3 и 4. Затем их стерли и вместо них записали новую пару чисел: их сумму и их среднее гармоническое. Эту же процедуру проделали еще 2024 раза, а получившиеся в итоге числа перемножили. Найти последнюю цифру произведения. (Примечание: среднее гармоническое положительных чисел $a, b$ равно $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.)

**Ответ:** 4

**Решение:** рассмотрим в общем виде операцию на доске. Пусть изначально были написаны числа $x_1$ и $x_2$, их произведение равно $x_1x_2$. Следом будут записаны числа $x_1 + x_2$ и $H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$. Их произведение равно $2x_1x_2$.

То есть за одну операцию исходное произведение чисел $3 \cdot 4 = 12$ увеличивается в 2 раза. Всего было 2025 операций, значит произведение чисел в итоговой паре равно $12 \cdot 2^{2025}$. Найдем последнюю цифру числа $2^{2025}$. Последние цифры степеней двоек цикличны с длиной цикла 4 (2,4,8,6,2,4,8…). Значит, $2^{2025}$ заканчивается на ту же цифру, что и $2^1$, то есть на 2. С учетом умножения на 12, получаем, что итоговое произведение оканчивается на 4.

**Задание 6.2** На доске записаны два числа: 2 и 7. Затем их стерли и вместо них записали новую пару чисел: их сумму и их среднее гармоническое. Эту же процедуру проделали еще 2023 раза, а получившиеся в итоге числа перемножили. Найти последнюю цифру произведения. (Примечание: среднее гармоническое положительных чисел $a, b$ равно $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.)

**Ответ:** 4

**Решение:** рассмотрим в общем виде операцию на доске. Пусть изначально были написаны числа $x_1$ и $x_2$, их произведение равно $x_1x_2$. Следом будут записаны числа $x_1+x_2$ и $H=\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$. Их произведение равно $2x_1x_2$.

То есть за одну операцию исходное произведение чисел $2\cdot 7=14$ увеличивается в 2 раза. Всего было 2024 операции, значит произведение чисел в итоговой паре равно $14\cdot 2^{2024}$. Найдем последнюю цифру числа $2^{2024}$. Последние цифры степеней двоек цикличны с длиной цикла 4 (2,4,8,6,2,4,8…). Значит, $2^{2024}$ заканчивается на ту же цифру, что и $2^4$, то есть на 6. С учетом умножения на 14, получаем, что итоговое произведение оканчивается на 4.